

Extrema locaux de fonctions différentiables.

- (1) (1p) Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1^2 e^{x_2} + x_2^2 e^{x_3} + x_3^2 e^{x_1}.$$

Démontrer que l'origine est un point critique (i.e. $f'(0) = 0$). Pour quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, f possède un extremum local à l'origine?

- (2) (1p) Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que la condition

$$f''(a)(h, h) \geq \gamma \|h\|^2, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

avec $\gamma > 0$ est équivalente à la condition $f''(a)(h, h) > 0$ pour tout $h \neq 0$.

- (3) (2p) Soit $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ et soit $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $F(y) = 2y(0)^3 - 3y(0)^2$ et soit $y_0 \in E$ la fonction définie par $y_0(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$. Démontrer les affirmations suivantes :

- (a) F possède un minimum local en y_0 , si l'on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- (b) F ne possède pas un minimum local en y_0 , si l'on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.

- (4) (3p) Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continues et bornées avec la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [1, \infty)} |f(t)|$. On considère l'application $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$F(f) = \int_1^\infty \frac{f(t)^2}{t^4} dt - \int_1^\infty \frac{f(t)^3}{t^2} dt.$$

Démontrer que

- (a) $F'(0) = 0$ et $F''(0)(h, h) > 0$ pour $h \neq 0$.
- (b) F ne possède pas un minimum local en $0 \in E$.

Multiplicateurs de Lagrange.

- (1) (2p) Calculer géométriquement le minimum de $f|_{g^{-1}(0)}$ où

$$f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = y^2 - (x - 1)^3.$$

Montrer que le système $f' = \lambda g'$, $g = 0$ ne possède pas de solution. Expliquer pourquoi.

- (2) (2p) Trouver la distance minimale de la courbe plane $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$ à l'origine. Cette courbe est-elle compacte ?
- (3) (2p) Soient $m < n$ et A une matrice $m \times n$ de rang m . Parmi toutes les solutions de $Ax = b$ trouver à l'aide de multiplicateurs de Lagrange la solution pour laquelle $\|x\|_2$ est minimale. Donner une interprétation géométrique du résultat.
- (4) (2p) Calculer les extrema locaux de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sur $\mathcal{M}$, où

$$\mathcal{M} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1, \quad z = x + y \right. \right\}$$

Calcul des variations.

- (1) (2p) Pour le problème de minimisation de

$$f_L(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt, \quad L(t, x, x') = 2tx + (t^2 + 3x^2)x', \quad (t, x, x') \in \mathbb{R}^3$$

montrer que l'équation d'Euler–Lagrange s'annule identiquement. Trouver une fonction $F(t, x)$ telle que $L(t, x(t), x'(t))dt = dF(t, x(t))$ et montrer que l'intégrale $f_L(x)$ ne dépend que de $x(a)$ et $x(b)$, mais pas de la forme de $x(t)$.

- (2) (2p) Déterminer les extrémales des problèmes suivants

$$\int_0^1 (x'(t)^2 + 12tx(t))dt, \quad x(0) = 2, \quad x(1) = 3;$$

$$\int_1^2 x'(t)(1 + t^2x'(t))dt, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 2.$$

- (3) (2p) Trouver les extrémales de

$$\int_a^b t^n x'(t)^2 dt$$

Montrer que si $n \geq 1$ et $a < 0 < b$, il n'existe pas d'extrémale non constante.

- (4) (3p) Pour
- $y \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}_{>0})$
- l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

représente la longueur hyperbolique d'une courbe dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ paramétrisée par le chemin $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$, $\gamma(t) = (t, y(t))$. Trouver $y(t)$ avec $y(a) = A$, $y(b) = B$, $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$, qui minimise cette intégrale.

- (5) (4p) Explorer les extrémales du problème

$$(1) \quad f_L(x) = \int_{-1}^1 L(t, x(t), x'(t)) dt, \quad x(-1) = x(1) = b,$$

$$L(t, x, x') = \sqrt{x(1 + (x')^2)}, \quad (t, x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$$

en fonction de b . Calculer les valeurs correspondantes de $f_L(x)$.

Calcul des variations.

- (1) (2p) Afin de compléter la démonstration du Théorème 8 du cours, montrer que pour toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas identiquement nulle et pour tout triplet de nombres $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, il existe une fonction $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$h(a) = \alpha, \quad h(b) = \beta, \quad \int_a^b f(t)h(t)dt = \gamma.$$

- (2) (3p) Résoudre le problème de la forme d'une chaîne de longueur ℓ suspendue par ses extrémités et soumise à une force gravitationnelle uniforme, c'est-à-dire déterminer une fonction $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ correspondant à un extremum de la fonctionnelle

$$f(x) = \int_a^b x(t) \sqrt{1 + x'(t)^2} dt,$$

dans l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant aux conditions

$$x(a) = x(b) = 0, \quad \int_a^b \sqrt{1 + x'(t)^2} dt = \ell.$$

- (3) (3p) Le *problème de la reine Didon* consiste à déterminer, parmi toutes les courbes dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ et de longueur ℓ , celle qui délimite avec un segment l'aire maximale. Résoudre ce problème dans le cas où la courbe est représentée par le graphe d'une fonction. Il s'agit donc d'un maximum de la fonctionnelle

$$f(y) = \int_a^b y(t) dt,$$

sous les contraintes

$$y(a) = y(b) = 0, \quad \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2} dt = \ell.$$

- (4) (2p) Déterminer la fonction $\phi \mapsto \rho(\phi)$ extrémale du problème de minimisation de

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} d\phi$$

avec $\rho(\alpha) = r$ et $\rho(\beta) = R$. Interpréter géométriquement le problème et sa solution. Même question pour la fonction $\rho \mapsto \phi(\rho)$ et

$$\int_r^R \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2} d\rho$$

et les conditions $\phi(r) = \alpha$ et $\phi(R) = \beta$.

Indication : Considerer la longueur de chemins dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Calcul des variations.

- (1) Déterminer les géodésiques sur les surfaces paramétriques suivantes :
- (a) (2p) $\varphi(\phi, z) = ((1 - z) \cos \phi, (1 - z) \sin \phi, z)$ (cône);
 - (b) (2p) $\varphi(\phi, z) = (R \cos \phi, R \sin \phi, z)$ (cylindre);
 - (c) (2p) $\varphi(\phi, \theta) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ (sphère);
 - (d) (2p) $\varphi(\phi, z) = (\sqrt{z} \cos \phi, \sqrt{z} \sin \phi, z)$ (paraboloïde de révolution);
- (2) (2p) Déterminer les équations différentielles pour les géodésiques sur la surface paramétriques

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, hv)$$

Formes différentielles.

- (1) (1p) Soient $\alpha, \beta \in E^*$. À quelle condition a-t-on $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$?
 (2) (1p) Est-il vrai que tout élément de $L^2(E)$ puisse s'écrire sous la forme $\alpha \otimes \beta$?
 (3) (1p) Montrer que $f \in L^k(E)$ est alternée si et seulement si $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ dès que deux des vecteurs v_i sont égaux.
 (4) (1p) Soit $A: L^r(E) \rightarrow L^r(E)$ l'opérateur d'antisymétrisation,

$$A(\alpha)(v_1, \dots, v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon_\sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}).$$

Montrer que

$$A(\alpha \otimes A(\beta)) = A(\alpha \otimes \beta)$$

- (5) (2p) Pour deux entiers positifs $r \leq n$ et deux applications $i, j: \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, on associe la valeur

$$\hat{\delta}_{i,j} = \det(A_{i,j}), \quad A_{i,j} = (\delta_{i_p, j_q})_{p,q=1}^r, \quad i_p \equiv i(p), \quad j_q \equiv j(q)$$

Montrer que pour $\alpha \in \Lambda^r(E)$ et $\beta \in \Lambda^s(E)$, on a

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{r+s}) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq r+s \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq r+s}} \hat{\delta}_{i,j} \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}) \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_s}),$$

où

$$(i \sqcup j)_k = \begin{cases} i_k, & \text{si } k \leq r; \\ j_{k-r}, & \text{si } k > r. \end{cases}$$

- (6) (1p) Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On considère la forme bilinéaire sur E définie par :

$$\phi(x, y) = x_1 y_3 + \alpha x_2 y_1 + \beta x_3 y_2.$$

Est-il possible de choisir α et β pour que cette forme soit alternée ? Même question avec la forme

$$\phi(x, y) = x_1 y_3 + x_1 y_2 + \alpha x_3 y_1 + \beta x_2 y_1.$$

- (7) (1p) Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$ et soit $\{\omega_i\}_{i=1}^{2n}$ une base linéaire de E^* . On définit

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \omega_{2i-1} \wedge \omega_{2i} \in \Lambda^2(E).$$

Calculer $\underbrace{\alpha \wedge \dots \wedge \alpha}_{n \text{ fois}}$.

- (8) (2p) Soient $\gamma \in \Lambda^1(E)$, $\gamma \neq 0$, et $\alpha \in \Lambda^k(E)$. Montrer que pour qu'il existe $\beta \in \Lambda^{k-1}(E)$ telle que $\alpha = \beta \wedge \gamma$, il faut et il suffit que $\alpha \wedge \gamma = 0$.

Formes différentielles.

- (1) (2p) Calculer la différentielle extérieure des formes différentielles suivantes :

(a) $2xydx + x^2dy$;

(b) $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$;

(c) $2zxdy \wedge dz + 2yzdz \wedge dx - (x^2 - y^2)dx \wedge dy$.

- (2) (2p) Considérons la 2-forme différentielle sur
- $\mathbb{R}^3$
- définie par

$$\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

Soit $f = x^2 + y^2 + z^2$. Démontrer que $\alpha \wedge df = 2f dx \wedge dy \wedge dz$.

- (3) (2p) Soit
- $U \subset \mathbb{R}^2$
- le demi-plan supérieur:
- $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$
- . On considère les 2-formes différentielle sur
- U
- suivantes

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{y^2}, \quad \tau = \frac{du \wedge dv}{v^2}, \quad u = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Démontrer que $\omega = \tau$.

- (4) (2p) Soit

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t)).$$

Calculer $\varphi^*(\alpha)$ où

$$\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}), \quad \alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

- (5) (4p) Soit un ouvert
- $U \subset \mathbb{R}^{2n}$
- , et soit
- $\{a_{i,j}, b_{i,j} \mid i, j \in \{1, \dots, 2n\}\} \subset \Omega^0(U)$
- un ensemble de fonctions tel que

$$a_{i,j} + a_{j,i} = b_{i,j} + b_{j,i} = 0, \quad \sum_{k=1}^{2n} a_{i,k} b_{k,j} = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 2n\}$$

On définit l'application

$$(\Omega^0(U))^2 \rightarrow \Omega^0(U), \quad (f, g) \mapsto \{f, g\} \equiv \sum_{i,j=1}^{2n} a_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0, \quad \forall f, g, h \in \Omega^0(U);$

(b) $d\omega = 0$, où $\omega \equiv \sum_{i,j=1}^{2n} b_{i,j} dx_i \wedge dx_j \in \Omega^2(U)$.

Intégrales multiples.

- (1) Calculer l'intégrale double $\int_D f(x, y) dx dy$ dans les cas suivants :
- (a) (1p) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = (x + y)^2$;
 - (b) (1p) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x + y \leq 1, y - x \leq 1\}$, $f(x, y) = x^2 y$;
 - (c) (1p) D est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 1)$, et $(2, -1)$, $f(x, y) = (x + 2y)^2$;
 - (d) (1p) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 2, x + y \leq 5\}$, $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^4}$;
 - (e) (1p) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = xy^2$;
 - (f) (1p) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$;
- (2) (2p) On pose $I_a = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$, $J_a = \int_{D_a} e^{-x^2 - y^2} dx dy$, où $D_a = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Calculer J_a ; en déduire la limite $\lim_{a \rightarrow \infty} I_a$.
- (3) (2p) En utilisant la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

démontrer que

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

Intégration de formes différentielles.

- (1) (2p) Un k -cube singulier de $U \subset \mathbb{R}^n$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ $\gamma: I^k \rightarrow U$. Une k -chaîne cubique singulière de U est une combinaison linéaire formelle de k -cubes singuliers de U :

$$c = \sum_{i=1}^l c_i \gamma_i,$$

où pour tout indice $i \in \{1, \dots, l\}$, $c_i \in \mathbb{R}$ et γ_i est un k -cube singulier de U . Pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, soit $C_k(U)$ l'espace vectoriel de k -chaînes cubiques singulières de U . Soit $C_*(U) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} C_k(U)$. Le bord d'un k -cube singulier γ de U est une $(k-1)$ -chaîne cubique singulière $\partial\gamma$ définie par

$$\partial\gamma = \sum_{i=1}^k \sum_{\epsilon \in \{0,1\}} (-1)^{i+\epsilon} \gamma \circ \varphi_{i,\epsilon},$$

où

$$\varphi_{i,\epsilon}: I^{k-1} \rightarrow I^k, \quad (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, \epsilon, t_i, \dots, t_{k-1}).$$

Soit $\partial: C_*(U) \rightarrow C_*(U)$ l'application linéaire correspondante. Démontrer que $\partial \circ \partial = 0$.

Indication. Si $i \leq j$, alors $\varphi_{i,\epsilon} \circ \varphi_{j,\tau} = \varphi_{j+1,\tau} \circ \varphi_{i,\epsilon}$.

- (2) (4p) Soient le disque unité fermé $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ et $f: D \rightarrow D$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le **théorème de Brouwer** dit qu'il existe un point fixe de f dans D . Pour démontrer cette assertion, on procède par l'absurde : on suppose qu'il n'y a pas de points fixes dans D . Dans ce cas, soit

$$g: D \rightarrow S^1 = \partial D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

l'application qui associe à $x \in D$ l'unique point d'intersection du cercle S^1 avec la droite passant par les points x et $f(x)$ et qui est plus proche à x qu'à $f(x)$. Soit σ le 2-cube singulier de D donné par

$$\sigma(s, t) = (s \cos(2\pi t), s \sin(2\pi t)).$$

Le théorème de Stokes dit que

$$\int_{\partial\sigma} g^*(\alpha) = \int_{\sigma} dg^*(\alpha) = \int_{\sigma} g^*(d\alpha) = 0$$

où

$$\alpha := \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

Pour finir la démonstration,

- (a) donner une formule analytique pour l'application g et démontrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$;
- (b) démontrer que

$$\int_{\partial\sigma} g^*(\alpha) \neq 0.$$

- (3) (4p) En utilisant la paramétrisation $(x, y, z) = (ar \sin(\pi s) \cos(2\pi t), br \sin(\pi s) \sin(2\pi t), cr \cos(\pi s))$ et le théorème de Stokes, calculer le volume de la boule délimitée par l'ellipsoïde

$$E_{a,b,c} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Equations différentielles.

- (1) (1p) Démontrer que $f(t, y) = \sqrt{|y|}$ n'est pas lipschitzienne sur $A \subset \mathbb{R}^2$ contenant $(t, 0)$.
- (2) (1p) Soit $f(x, y) = 3(y - 1)^{2/3}$. Démontrer que le problème de Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$, admet deux solutions pour $y_0 = 1$ et une solution pour $y_0 = 2$. Expliquer ces résultats en utilisant le théorème de l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy.
- (3) (1p) Pour un problème de Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(t_0) = y_0$, l'itération de Picard–Lindelöf et la suite des fonctions $g_n = T(g_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$, où

$$T(g)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds.$$

Appliquer l'itération de Picard–Lindelöf dans le cas $f(x, y) = -y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Est-ce que cette suite converge ?

- (4) (6p) Construire les trois premières itérées de Picard–Lindelöf pour les problèmes de Cauchy suivants :
 - (a) $y' = y^2 + 3x^2 - 1$; $y(1) = 1$.
 - (b) $y' = y + e^{y-1}$; $y(0) = 1$.
 - (c) $y' = 1 + x \sin y$; $y(\pi) = 2\pi$.
 - (d) $y' = 2x + z$, $z' = y$; $y(1) = 1$, $z(1) = 0$.
 - (e) $y' = z$, $z' = y^2$; $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.
 - (f) $y' = z$, $z' = 3xy$; $y(1) = 2$, $z(1) = -1$.
- (5) (3p) Donner un intervalle sur lequel il existe une solution du problème de Cauchy suivant :
 - (a) $y' = x + y^3$; $y(0) = 0$.
 - (b) $y' = 2y^2 - x$; $y(1) = 1$.
 - (c) $y' = z^2$, $z' = y^2$; $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.

Equations différentielles.

- (1) (8p) Calculer l'intervalle maximal $I_{\max}(x_0, y_0)$ pour les équations suivantes :
- (a) $y' = y^2$;
 - (b) $y' = 1 - y^2$;
 - (c) $y' = \frac{e^y - 2}{(e^y - 1)x}$;
 - (d) $y' = y^2 \cos(x)$.
- (2) (2p) Soit $\phi(x)$ la solution maximale du problème de Cauchy $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = a > 0$, et $I_{\max} =]\omega_-, \omega_+[$ son intervalle de définition. Montrer que $\phi(x)$ est strictement croissante sur $[0, \omega_+[$ et $\omega_+ < \infty$.
- (3) (1p) Résoudre le problème de Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, où $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = Ly + \delta$, $L, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

Equations différentielles linéaires.

- (1) (2p) Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

en passant en coordonnées polaires et esquisser les trajectoires.

- (2) (2p) Calculer la résolvante de l'équation différentielle

$$y_1' = y_1 \cos x - y_2 \sin x, \quad y_2' = y_2 \cos x + y_1 \sin x.$$

Indication : Trouver une équation différentielle pour $z = y_1 + iy_2$.

- (3) (3p) Soient
- $A(x)$
- une matrice d'ordre
- n
- et
- $\varphi(x)$
- une solution non-triviale de
- $y' = A(x)y$
- . Montrer qu'en utilisant
- $\varphi(x)$
- , on peut réduire le problème de Cauchy de l'équation
- $y' = A(x)y$
- à un problème analogue pour une matrice d'ordre
- $n - 1$
- .

Indication. Si l'on suppose que $\varphi_1(x) \neq 0$, chercher une solution de la forme $y = u\varphi(x) + z$, où u est une fonction scalaire et où z est de la forme $z = (0, z_2, \dots, z_n)^T$.

- (4) (2p) A l'aide de l'exercice précédent, calculer la résolvante
- $R(x, 1)$
- de l'équation

$$y' = \begin{pmatrix} 1/x & -1 \\ 1/x^2 & 2/x \end{pmatrix} y$$

sachant qu'elle admet $\varphi(x) = (x^2, -x)^T$ comme solution.*Remarque.* Le résultat est

$$\begin{pmatrix} x^2(1 - \ln x) & -x^2 \ln x \\ x \ln x & t(1 + \ln x) \end{pmatrix}.$$

Equations différentielles linéaires.

Si $R(x, x_0)$ est la résolvante de $y' = A(x)y$, alors la solution du problème de Cauchy $y' = A(x)y + g(x)$, $y(x_0) = y_0$, est donnée par $y(x) = R(x, x_0)y_0 + \int_{x_0}^x R(x, t)g(t)dt$.

- (1) (2p) Résoudre

$$y' = \begin{pmatrix} 1/x & -1 \\ 1/x^2 & 2/x \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Indication: Utiliser la solution du dernier exercice de la série précédente.

- (2) (2p) Supposons que la matrice $A(x)$ soit continue sur l'intervalle I . Démontrer que si les matrices $A(x)$ et $\int_{x_0}^x A(t)dt$ commutent pour tout $x_0, x \in I$, alors la résolvante de $y' = A(x)y$ satisfait

$$R(x, x_0) = \exp \left(\int_{x_0}^x A(t)dt \right)$$

- (3) (2p) On considère le système $y' = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y$.

(a) Démontrer que $A(x)$ et $\int_{x_0}^x A(t)dt$ ne commutent pas.

(b) Calculer la résolvante.

(c) Démontrer que dans ce cas particulier $R(x, x_0) \neq \exp \left(\int_{x_0}^x A(t)dt \right)$.

- (4) (6p) Trouver les solutions :

$$y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}, \quad y'' + 4y = 3\sin(x), \quad y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12.$$