Exercices pour la séance du mardi 16.09.2014

Révision de l'analyse de première année.

(1) Soit $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer que f possède au moins un point fixe.
Indication : considérer la fonction $g(x) = f(x) - x$.

(2) On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < x + y \leq 1\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \max(|x|,|y|) < 3\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 = 0\},$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 0,\ x \in \{1/n |\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}\}.$$

Quels ensembles sont-ils ouverts, fermés, bornés, compacts?

(3) La *fonction Gamma d'Euler* est définie pour tout nombre réelle x strictement positive par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Démontrer que

$$\Gamma(x) = x^x \int_{-\infty}^\infty e^{(s-e^s)x}ds$$

(4) La *fonction Bêta d'Euler* est définie pour tous nombres réelles x et y strictement positives par l'intégrale

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Démontrer qu'elle est liée à la fonction Gamma d'Euler par la relation

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

(5) Pour $a, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$ considérons l'équation

$$a(x^2+y^2) + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

Montrer que cette équation représente un cercle dans $\mathbb{R}^2$ si $a \neq 0$ et $b_1^2 + b_2^2 > ac$. Discuter le cas $a = 0$. Que se passe-t-il si $b_1^2 + b_2^2 \leq ac$?

Exercices pour la séance du mardi 23.09.2014

Calcul des normes. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dit *normé* lorsqu'il est muni d'une *norme*, c'est-à-dire d'une application $\|.\|\colon E \to \mathbb{R}$ satisfaisant les hypothèses suivantes :

séparation: : $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0;$
homogénéité: : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|;$
sous-additivité: : $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

(1) (2p) Soit $N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$N(x) = \sqrt{x_1^2 - x_1 x_2 + 4x_2^2}.$$

(a) Montrer que $N(x)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Trouver deux nombres réels positifs c_1 et c_2 tels que

$$N(x)c_1 \leq \|x\| \leq c_2 N(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

où $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est la norme euclidienne de x.

(2) (1p) Soit $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Indication. Utilizer l'égalité $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, où $\langle x, y\rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

(3) (2p) Soit $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit la *norme* ∞ (appelée aussi la *norme uniforme*) de f :

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [0,1]} |f(t)|,$$

et pour $p \geq 1$, on definit aussi la *norme* p de f :

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

(a) Pour $p \in \{1, 2, \infty\}$, calculer la norme p des fonctions suivantes :

(i) $f_n(t) = t^n$, $n \geq 0$;

(ii) $g_n(t) = t^n - t^{2n}$, $n \geq 0$;

(iii) pour $n \geq 1$,

$$h_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}(1 - nt) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/n, \\ 0 & \text{si } 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(b) Pour $p \in \{1, 2, \infty\}$, calculer les limites des suites $(\|f_n\|_p)_{n\geq 0}$, $(\|g_n\|_p)_{n\geq 0}$, $(\|h_n\|_p)_{n\geq 1}$.

Exercices pour la séance du mardi 30.09.2014

Espaces métriques, espaces vectoriels normés.

(1) (4p) Soit $P[0,1]$ le sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment unité donné par les fonctions polynomiales, c'est-à-dire les fonctions de la forme $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$.

(a) Montrer que

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \right\|_* := \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$

définit une norme sur $P[0,1]$.

(b) Montrer que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_*$ pour tout $f \in P[0,1]$.

(c) Calculer les normes $\|f_n\|_*$ et $\|f_n\|_\infty$ pour les polynômes $f_n(t) = t^n(1-t)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$ il existe $f \in P[0,1]$ tel que $\|f\|_* > k\|f\|_\infty$.

(2) (1p) Soit (X,d) un espace métrique. Montrer qu'une boule ouverte $B(x,r)$ est un ouvert.

(3) (1p) Soient a et b deux nombres réels. Montrer que l'ensemble

$$A = \{f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \mid a < f(t) < b, \ \forall t \in [0,1]\}$$

est un ouvert de l'espace $(\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

(4) (1p) Pour $p \in \{1,2\}$, démontrer qu'il existe un nombre $c_p \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que

$$\|f\|_p \leq c_p \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$$

ANALYSE II (Analyse réelle) **automne 2014–2015**

Exercices pour la séance du mardi 07.10.2014

Espaces métriques, espaces vectoriels normés.

(1) (2p) Démontrer que l'ensemble τ_d des ouverts d'un espace métriques (X, d) est une topologie sur X, c'est-à-dire que les trois propriétés suivantes sont satisfaites :
  (a) $\emptyset, X \in \tau_d$;
  (b) Pour tout $\alpha \subset \tau_d$, on a $(\cup_{U \in \alpha} U) \in \tau_d$;
  (c) Pour tout sous-ensemble fini $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \tau_d$, on a $(\cap_{i=1}^n U_i) \in \tau_d$.

(2) (2p) Soient d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur un ensemble X. D'émontrer que les topologies induites par d_1 et d_2 coïncident : $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

(3) (2p) La suite $\{f_n\}_{n \geq 0}$ dans $(\mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, converge-t-elle si
  (a) $f_n(t) = t^n - t^{n+1}$?
  (b) $f_n(t) = t^n - t^{2n}$?

(4) (2p) On définit une suite dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([-1,1]; \mathbb{R}), \|.\|_1)$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t}{|t|} & \text{si } |t| \geq \frac{1}{n}; \\ nt & \text{si } |t| \leq \frac{1}{n}, \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

D'émontrer que cette suite est une suite de Cauchy qui ne converge pas.

(5) (2p) Montrer à l'aide de countre-exemple que l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ avec la norme $\|.\|_2$ n'est pas complet.

ANALYSE II (Analyse réelle) **automne 2014–2015**

Exercices pour la séance du mardi 14.10.2014

Espaces métriques, espaces vectoriels normés. Une application entre deux espaces métriques $f\colon X \to Y$ est dite *continue en* $a \in X$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$ si $d_X(x, a) < \delta$. Une telle application est dite *continue* si elle est continue en tout point.

(1) (1p) D'émontrer qu'une application entre deux espaces métriques $f\colon X \to Y$ est continue si et seulement si pour tout ouvert U de Y l'image réciproque $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

(2) (2p) Démontrer que pour un ensemble arbitraire A, l'ensemble

$$B(A) = \{f\colon A \to \mathbb{R} |\ \exists\ M \in \mathbb{R},\ |f(a)| \leq M\ \forall a \in A\}$$

avec $\|f\|_\infty = \sup_{a\in A} |f(a)|$, est un espace vectoriel normé complet.

(3) (2p) Montrer que dans un espace vectoriel normé l'adhérence d'une boule ouverte $B(a, r) = \{x \mid \|x - a\| < r\}$ est l'ensemble $\{x \mid \|x - a\| \leq r\}$.

Trouvez un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ tel que, si l'on le munit de la distance induite par la valeur absolue, l'affirmation analogue est fausse, c'est-à-dire qu'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tels que l'adhérence de $B(a, r)$ n'est pas l'ensemble $\{x \mid \|x - a\| \leq r\}$

Indication. Essayer satisfaire la condition que l'adhérence de $B(a, r)$ est $B(a, r)$.

(4) (1p) Soit $F \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble fermé. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C}([a, b]; F) \equiv \{f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}) \mid f([a, b]) \subset F\}$$

muni de la distance induite par la norme uniforme est un espace métrique complet.

ANALYSE II (Analyse réelle) automne 2014–2015

Exercices pour la séance du mardi 21.10.2014

Espaces métriques, espaces vectoriels normés. Un *complété* d'un espace métrique X est un espace métrique complet $\tilde{X}$ avec une isométrie $i\colon X \to \tilde{X}$ tels que $i(X)$ est dense dans $\tilde{X}$.

Soient X, Y deux espaces métriques. Une application $f\colon X \to Y$ est dite *uniformément continue* si pour tout $\epsilon > 0$ in existe $\delta > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ si $d_X(x, y) < \delta$.

(1) (1p) Soient X, Y deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$ une application uniformément continue. Montrer que pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$, la suite $(f(x_n))_{n\geq 1} \subset Y$ est aussi une suite de Cauchy.

(2) (1p) Soit $\tilde{X}$ un complété d'un espace métrique X. Soit $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to Y$ une application uniformément continue qui prolonge une isométrie $f\colon X \to Y$. Montrer que $\tilde{f}$ est une isométrie.

(3) (1p) Soient $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1}$ trois suites de Cauchy dans un espace métrique (X, d). Montrer que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n)$ si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

(4) (2p) Démontrer que deux suites $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_1)$ définies par

$$f_n(t) = \begin{cases} (2t)^n, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - (2t-1)^n, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

et

$$g_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{n-1}{2n}, \\ 2nt - n + 1, & \text{si } \frac{n-1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

sont des suites de Cauchy et qu'elles sont dans la même classe d'équivalence du complété de l'espace métrique correspondant.

(5) (2p) Construire le complété de la droite réelle $\mathbb{R}$ avec la distance

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

ANALYSE II (Analyse réelle) **automne 2014–2015**

Exercices pour la séance du mardi 28.10.2014

Espaces métriques, espaces vectoriels normés. Un espace métrique X est dit *compact* si toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans X contient une sous-suite convergente.

(1) (1p) Soit $f\colon X \to X$ une application contractante d'un espace métrique Xavec la distance d. Soit d' une autre distance sur X équivalente à d. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que f^N est contractante par rapport à la distance d'.

(2) (3p) Pour $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, on associe l'application

$$f_\lambda\colon [4/3, 3/2] \to \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = x - \lambda(x^2 - 2).$$

(a) Déterminer l'intervalle maximal $[0, L]$ tel que $f_\lambda([4/3, 3/2]) \subset [4/3, 3/2]$ pour tout $\lambda \in [0, L]$.

(b) Quel est le choix optimal pour $\lambda \in [0, L]$ qui correspond à la constante de contraction minimale pour l'application $f_\lambda\colon [4/3, 3/2] \to [4/3, 3/2]$?

(3) (2p) Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_a(x) = ax^2 + \frac{1}{3},$$

et soit l'ensemble

$$A = \{a \in \mathbb{R} \mid f_a([0, 1]) \subset [0, 1]\}.$$

Déterminer le sous-ensemble $B \subset A$ tel que pour $a \in B$, f_a est une application contractante du segment $[0, 1]$. Pour $a \in B$, déterminer la valeur minimale de la constante de contraction et le point fixe de f_a.

(4) (1p) Soit $K\colon [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ une application continue. Démontrer que pour toute application continue $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, l'application $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \int_a^b K(t, s) f(s)\,\mathrm{d}s$$

est aussi continue.

Indication. Utiliser le théorème de Heine : toute application continue entre deux espaces métriques $f\colon X \to Y$ est uniformément continue si X est compact.

ANALYSE II (Analyse réelle) **automne 2014–2015**

EXERCICES POUR LA SÉANCE DU MARDI 4.11.2014

Espaces métriques, espaces vectoriels normés.

(1) (2p) On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation intégrale

$$f(x) = x + \lambda \int_0^1 (x-t)f(t)dt, \quad \forall t \in [0,1], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer l'ensemble W des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que l'équation ci-dessus possède une unique solution.

(b) Pour $\lambda \in W$, déterminer cette fonction f.

(2) (2p) Soit $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire ayant pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$. Montrer que A n'est pas contractante. Trouver N tel que A^N soit contractante.

(3) (4p) Soit $a \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $|a(0)| < 1$ et $|a(1)| < 1$. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta > 0$ et $\beta \neq 1$. Montrer que pour toute fonction $b \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, l'équation $f(t) = a(t)f(t^\beta) + b(t)$ possède une unique solution dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Indication : Considerer une application dont une N-ième itérée soit contractante.

(4) (1p) Soient $K\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ et $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. A toute fonction continue $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, on associe la fonction

$$T(g)\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad T(g)(t) = c(t) + \int_a^t K(t,s)g(s)ds.$$

Démontrer que $T(g)$ est continue sur $[a,b]$.

(5) (2p) Trouver la solution de l'équation intégrale :

$$f(x) = x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

par itérations successives, en partant de la fonction $f_0(x) \equiv 0$.

ANALYSE II (Analyse réelle) **automne 2014–2015**

Exercices pour la séance du mardi 11.11.2014

Espaces métriques, espaces vectoriels normés.

Un *codage ISF* de $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est un system d'applications contractantes $\{f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{i=1}^k$ tel que A est l'unique point fixe de l'application contractante $\mathcal{K}(f_1, \ldots, f_k) : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\mathcal{K}(f_1, \ldots, f_k)(B) = \cup_{i=1}^k f_i(B), \quad \forall B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

L'application $w_a^\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la homothétie de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rapport θ :

$$w_a^\theta(x) = \theta(x - a) + a, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(1) (3p) Trouver la distance de Hausdorff entre A et B :
   (a) $A = S((0,1),1)$, $B = S((0,-3),3)$ où
   $$S((a,b),r) \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$
   (b) $A = S((0,0),1)$,
   $$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + y^2\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 = 1 \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}$$
   (c) $A = f^m([0,1]) \subset \mathbb{R}$, $B = f^n([0,1])$, où $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et
   $$f = \mathcal{K}(w_0^{1/3}, w_1^{1/3}) : \mathcal{K}(\mathbb{R}) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}), \quad f(A) = w_0^{1/3}(A) \cup w_1^{1/3}(A).$$

(2) (2p) Le "tapis de Sierpinski" $TS \subset \mathbb{R}^2$ est défini en répétant indéfiniment le procédé suivant : on part d'un carré de sommets A, B, C, D dans le plan. On le partage en 9 carrés égaux, de côté égal au tiers du côté du carré de départ, on enlève le carré du milieu. Puis on recommence avec les 8 carrés restants, et ainsi de suite. Trouvez un codage ISF pour TS.

(3) (2p) Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ défini en répétant indéfiniment le procédé suivant : on part d'un segment AB dans le plan, et on construit le triangle isocèle $\Delta(ABC)$ ayant AB pour base et un angle droit au sommet C; puis on recommence avec AC et CB, et ainsi de suite. Trouvez un codage ISF pour D en utilisant deux transformations affines contractantes f_1 et f_2.

ANALYSE II (Analyse réelle) automne 2014–2015

Exercices pour la séance du mardi 18.11.2014

Espaces métriques, espaces vectoriels normés.

L'application $w_a^\theta \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la homothétie de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rapport θ :

$$w_a^\theta(x) = \theta(x-a) + a, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(1) (2p) L'ensemble de Cantor asymétrique C_a est defini comme le point fixe de l'application

$$\mathcal{K}(w_0^{1/2}, w_1^{1/4}) \colon \mathcal{K}(\mathbb{R}) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}), \quad A \mapsto w_0^{1/2}(A) \cup w_1^{1/4}(A).$$

Calculer la dimension de Hausdorff de C_a.

(2) (2p) Calculez la dimension de Hausdorff du "tapis de Sierpinski" $TS \subset \mathbb{R}^2$ défini en répétant indéfiniment le procédé suivant : on part d'un carré de sommets A, B, C, D dans le plan. On le partage en 9 carrés égaux, de côté égal au tiers du côté du carré de départ, on enlève le carré du milieu. Puis on recommence avec les 8 carrés restants, et ainsi de suite.

(3) (2p) Calculez la dimension de Hausdorff de l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ défini en répétant indéfiniment le procédé suivant : on part d'un segment AB dans le plan, et on construit le triangle isocèle $\Delta(ABC)$ ayant AB pour base et un angle droit au sommet C; puis on recommence avec AC et CB, et ainsi de suite.

(4) (2p) Démontrer que l'application

$$A \colon \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad Af = f(1/2)$$

n'est pas continue par rapport à la norme $\|.\|_2$.

ANALYSE II (Analyse réelle) **automne 2014–2015**

Exercices pour la séance du mardi 25.11.2014

Espaces vectoriels normés, opérateurs linéaires bornés.

(1) (2p) Soit E un espace de Banach. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|A^m\| < 1$ pour un $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Démontrer que $\mathrm{id}_E - A$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$.

(2) (2p) Soit E l'espace de Banach $(\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. Soit $V\colon E \to E$ l'opérateur linéaire défini par
$$(Vf)(t) = \int_0^t f(s)ds.$$
Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, l'opérateur $\lambda\,\mathrm{id}_E - V$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$?

(3) (2p) Soit $E = (\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ et soit $A \in \mathcal{L}(E)$ défini par
$$(Af)(t) = f(t) + \int_0^1 e^{t+s} f(s)ds.$$
Démontrer que A est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et calculer son inverse.

(4) (2p) Pour tout espace de Banach E, démontrer que les séries
$$\exp_E(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n, \quad \mathrm{shc}_E(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} X^{2n}$$
définissent des applications $\exp_E,\ \mathrm{shc}_E\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$.

(5) (1p) Soit $(E, \|.\|)$ l'espace des matrices $n \times n$ avec la norme induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$. Considérons l'application linéaire $l\colon E \to E$ donnée par $l(H) = X_0 H + H X_0$, où X_0 est une matrice fixée. Calculer la norme de l.

(6) (1p) On définit deux opérateurs linéares
$$L, R\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$$
par
$$(LX)H = XH,\ (RX)H = HX, \quad \forall H, X \in \mathcal{L}(E).$$
Démontrer que $L, R \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E), \mathcal{L}(\mathcal{L}(E)))$ et que pour tout $X \in \mathcal{L}(E)$, on a
$$(LX)(RX) = (RX)(LX),$$

ANALYSE II (Analyse réelle) **automne 2014–2015**

Exercices pour la séance du mardi 2.12.2014

Calcul différentiel dans les espaces vectoriels normés.

(1) Soient E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$. Calculer la dérivée de l'application $f\colon GL(E) \to \mathcal{L}(E)$ donnée par

(a) (1p)
$$f(X) = X^2AX^3,$$

(b) (1p)
$$f(X) = X^{-2}AX,$$

(c) (1p)
$$f(X) = X^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(2) (2p) Calculer la dérivée de la fonction $f\colon GL(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ donnée par
$$f(X) = (X^TX)^{-1}.$$

(3) (3p) Pour tout espace de Banach E, on associe les applications
$$\exp_E,\ \mathrm{shc}_E\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$$
données par les séries suivantes :
$$\exp_E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n, \quad \mathrm{shc}_E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}X^{2n}.$$
Démontrer que
$$\exp'_E(2X) = \exp_{\mathcal{L}(E)}(LX + RX)\,\mathrm{shc}_{\mathcal{L}(E)}(LX - RX)\,.$$
où les opérateurs linéaires
$$L,\ R\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$$
sont définis par
$$(LX)H = XH,\ (RX)H = HX, \quad \forall H, X \in \mathcal{L}(E).$$

ANALYSE II (Analyse réelle) **automne 2014–2015**

Exercices pour la séance du mardi 9.12.2014

Calcul différentiel dans les espaces vectoriels normés.

(1) (2p) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue et qui est différentiable sur l'ensemble $D =]a,b[\setminus V$, où $V \subset]a,b[$ est un sous-ensemble fini. Démontrer ou donner des contre-exemples aux affirmations suivantes :
  (a) il existe un $\xi \in D$ tel que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$;
  (b) on a l'estimation $|f(b) - f(a)| \leq \sup_{t\in D}|f'(t)|(b-a)$.

(2) (1p) Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert convexe[1], $f\colon U \to F$ une application différentiable telle que la dérivée $f'\colon U \to \mathcal{L}(E,F)$ est une application constante. Montrer que f est la somme d'une application constante et d'une application linéaire continue.

(3) (2p) Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert connexe et $f\colon U \to F$ une application qui satisfait l'inégalité
$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in U, \quad C \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$
Montrer que f est constante sur U.

(4) (2p) Soient E, F, G des espaces vectoriels normés, $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ des applications deux fois différentiables. Calculer $(g \circ f)''(x)$.

(5) (1p) Calculer la deuxième dérivée de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par
$$f(x) = (x_1^3 + x_1 x_2^3, e^{x_1 - x_2}, \cos(x_1 x_2)).$$

(6) (2p) Soient E un espace de Banach et $f\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ l'application donnée par $f(X) = X^3$. Calculer $f''(X)$.

[1] On dit qu'un sous-ensemble D d'un espace vectoriel est *convexe* si, quels que soient $a, b \in D$, le segment $[a,b] \equiv \{(1-t)a + tb|\ t \in [0,1]\}$ est dans D.

ANALYSE II (Analyse réelle) **automne 2014–2015**

EXERCICES POUR LA SÉANCE DU MARDI 16.12.2014

Calcul différentiel dans les espaces vectoriels normés.

(1) (1p) Soient E un espace de Banach et $f\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ l'application donnée par $f(X) = X^3$. Calculer $f'''(X)$.

(2) (2p) Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $f\colon E \to F$ une application différentiable telle que la dérivée $f'\colon E \to \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire continue. Montrer qu'il existe une application bilinéaire symétrique bornée $B\colon E \times E \to F$ et un vecteur $v \in F$ tels que

$$f(x) = B(x, x) + v, \quad \forall x \in E.$$

Indication. Pour un $y \in E$ fixé, considerer l'application $g_y\colon E \to F$ définie par $g_y(x) = f(x + y) - f(x)$.

(3) (3p) Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} y - \frac{x^2 y}{|y|} & \text{si } |y| \geq x^2; \\ \frac{y|y|}{x^2} - y & \text{si } |y| \leq x^2. \end{cases}$$

Montrer que

(a) f est partout différentiable.

(b) f n'est pas strictement différentiable à l'origine.