

## ELECTRODYNAMIQUE II

## Série 1

**Exercice 1: Calcul vectoriel**

Montrer que pour tous champs vectoriels  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ , et  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ :

$$\text{a) } \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$$

$$\text{b) } \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

$$\text{c) } \nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})$$

$$\text{d) } \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$\text{e) } (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$\text{f) } \nabla \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

**Exercice 2: Ondes électromagnétiques**

A partir des équations de Maxwell, nous trouvons dans le vide que

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{E} &= 0 \\ \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Montrer que l'ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 f(ct \pm \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 g(ct \pm \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \end{aligned}$$

résout les équations d'onde et trouver des conditions pour les vecteurs  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{B}_0$  ainsi que pour les fonctions  $f$  et  $g$  (en regardant aussi les équations de Maxwell dans le vide, (1.27-1.30)).

### Exercice 3: Unités de base

Dans le cadre des unités Gaussiennes, on peut exprimer toutes les grandeurs en centimètres, grammes et secondes, tandis que les unités MKSA ajoutent l'ampère. Remplissez la table suivante (qui vient de la table 4 de Jackson) avec les bonnes expressions en m, kg, s et A (MKSA) ou en cm, g et s:

unité	MKSA	Gauss
longueur	m	cm
masse	kg	g
temps	s	s
charge	A s	$g^{1/2}cm^{3/2}s^{-1}$
fréquence		
force		
travail		
courant		
champ électrique <b>E</b>		
résistance		
capacité		
induction magnétique <b>B</b>		

## ELECTRODYNAMIQUE II

## Série 2 : FONCTIONS DE GREEN

**Exercice 1 : La fonction de Green du laplacien en trois dimensions**

On considère l'équation différentielle suivante

$$-\Delta G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) . \quad (1)$$

- (a) Prendre d'abord le domaine de définition  $\Omega = \mathbb{R}^3$ . Montrer que la solution s'annulant à l'infini (c'est-à-dire pour  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ ) est

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} .$$

- (b) Prendre  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R\}$ , c'est-à-dire la boule de rayon  $R$  centrée en  $\mathbf{y}$ , avec  $|\mathbf{y}| < R$ . Résoudre (1) avec la condition aux limites  $G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = 0$  si  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = R$  (c'est-à-dire  $G(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  s'annule sur le bord de  $\Omega$ ). Ici  $\mathbf{y}$  joue le rôle d'un paramètre fixe.

Comment peut-on interpréter le résultat de l'exercice 1(b) en termes électrostatiques? (La méthode des charges images.)

**Indications :**

- (a) Utiliser la transformée de Fourier et l'intégrale suivante :  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2$ .
- (b) On a  $\Delta_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{w}|} = 0$  si  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < R$  et  $|\mathbf{w} - \mathbf{y}| > R$ . Chercher  $G(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  de la forme

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} - \frac{a(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{w}(\mathbf{y})|} ,$$

où  $a(\mathbf{y})$  est un nombre qui peut dépendre de  $\mathbf{y}$ , et  $\mathbf{w}(\mathbf{y})$  est un vecteur qui peut dépendre de  $\mathbf{y}$  et qui satisfait  $|\mathbf{w} - \mathbf{y}| > R$  (prendre  $\mathbf{w} = b(|\mathbf{y}|)\mathbf{y}$ , (pourquoi?) où  $b(|\mathbf{y}|)$  est un nombre qui peut dépendre de  $|\mathbf{y}|$ )

**Application :** Le potentiel électrostatique  $\phi$  dû à une distribution de charge de densité  $\rho$  est déterminé par l'équation de Poisson

$$-\Delta\phi(\mathbf{x}) = 4\pi\rho(\mathbf{x}) .$$

La solution est

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' .$$

La fonction de Green joue le rôle d'une fonction d'influence :  $4\pi G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  détermine le potentiel au point  $\mathbf{x}$  dû à une unité de charge ponctuelle placée au point  $\mathbf{x}'$ .

**Exercice 2 : Fonction de Green de l'équation d'onde à trois plus une dimensions (voir cours)**

- (a) Déterminer la fonction de Green 'retardée' pour  $\mathcal{D} = \partial_s^2 - \Delta$ , (le d'alembertien) qui satisfait

$$(\partial_s^2 - \Delta)G(\mathbf{x}, s) = \delta(\mathbf{x})\delta(s) .$$

Ici 'retardée' signifie que la fonction de Green est nulle pour  $s < 0$ . C'est-à-dire, le champ au temps  $s$  n'est pas influencé par les valeurs des sources dans le futur,  $s' > s$ .

— **Indication** : 1) Faire la transformation de Fourier de l'équation ci-dessus seulement sur les coordonnées spatiales.

2) Vérifier que

$$\widehat{G}(\mathbf{k}, s) = H(s) \frac{\sin(|\mathbf{k}|s)}{|\mathbf{k}|} \quad (2)$$

est une (!) solution de l'équation

$$(\partial_s^2 + |\mathbf{k}|^2)\widehat{G}(\mathbf{k}, s) = \delta(s) .$$

3) Montrer formellement le résultat suivant

$$\delta(|\mathbf{x}| - R) = 4\pi R \frac{\sin(|\mathbf{k}|R)}{|\mathbf{k}|} . \quad (3)$$

4) Calculer la transformée de Fourier inverse de  $\widehat{G}$  à l'aide de (3).

(b) En utilisant le résultat de (a),

$$G(\mathbf{x}, s) = \frac{H(s)}{4\pi s} \delta(s - |\mathbf{x}|) , \quad (s = ct)$$

montrer que les potentiels électromagnétiques dans la jauge de Lorentz sont donnés par

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} . \end{aligned}$$

### Exercice 3 : Fonction de Green de l'équation d'onde à deux plus une dimensions

Montrer que, dans un espace à deux dimensions spatiales, la fonction de Green 'retardée' définie par

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2)G = \delta$$

est donnée par

$$G(x, y, t) = \begin{cases} \frac{H(t)}{2\pi\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} & \text{pour } t^2 > x^2 + y^2 , \\ 0 & \text{pour } t^2 \leq x^2 + y^2 . \end{cases}$$

**Indication** : l'équation (2) est valable pour un espace de dimension arbitraire. Avec cela il y a deux méthodes pour arriver au résultat :

**Première méthode** : Calculer directement la transformée de Fourier inverse de  $\widehat{G}(\mathbf{k}, t)$  en deux dimensions. Utiliser que

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \exp(ikr \cos \varphi) = 2\pi J_0(rk) ,$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre zéro. L'intégrale suivante, qu'on trouve par exemple dans Abramowitz, Eq. (11.4.38) est utile pour la suite :

$$\int_0^\infty \sin(kt) J_0(rk) dk = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} & \text{pour } t > r , \\ 0 & \text{pour } t \leq r . \end{cases}$$

**Deuxième méthode** (directe) : Considérons  $G_R(\mathbf{x}; t) = \frac{H(t)}{4\pi t} \delta(t - |\mathbf{x}|)$  en trois dimensions pour un paramètre  $t$  fixe. Considérer une fonction  $u$  qui ne dépend que de  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ . En intégrant sur la troisième coordonnée  $x'_3$ , montrer que pour un  $t$  fixe on trouve

$$(G_R * u)(\mathbf{x}) \equiv \frac{H(t)}{4\pi t} \int d^3 x' u(\mathbf{x}') \delta(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \frac{H(t)}{2\pi} \int dx'_1 dx'_2 \frac{H(t - |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}'|) u(\bar{\mathbf{x}}')}{\sqrt{t^2 - |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}'|^2}}.$$

Ici les vecteurs barrés sont des vecteurs 2-dimensionnels :  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$  et  $\bar{\mathbf{x}}' = (x'_1, x'_2)$ .

Interprétation de ce résultat : Dans un espace à deux dimensions, un éclair de lumière, une fois arrivé au point  $\mathbf{x}$ , ne le dépasse pas mais y reste en décroissant lentement. (Ceci est aussi vraie pour des ondes sur la surface de l'eau ou les ondes acoustiques sur une surface métallique).

## ELECTRODYNAMIQUE II

## Série 3 Relativité restreinte

**Exercice 1: Distances genre temps, espace et lumière**

La distance entre deux événements  $x = (ct, x^1, x^2, x^3)$  et  $y = (ct', y^1, y^2, y^3)$  est appelée

$$\begin{array}{ll} \text{genre temps} & \text{si } s^2 = -(ct - ct')^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 < 0 \\ \text{genre lumière} & \text{si } s^2 = -(ct - ct')^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 = 0 \\ \text{genre espace} & \text{si } s^2 = -(ct - ct')^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 > 0 \end{array}$$

Montrer que

- i) Si  $x$  et  $y$  ont une distance genre temps, il existe un référentiel tel que  $x$  et  $y$  sont à la même position spatial. Trouver ce référentiel.
- ii) Si  $x$  et  $y$  ont une distance genre espace, il existe un référentiel tel que  $x$  et  $y$  sont simultanés, c'est-à-dire au même temps. Trouver ce référentiel.

**Exercice 2: Boost en direction arbitraire**

Sous un boost en direction  $x$  avec vitesse  $v$  les coordonnées changent d'après

$$t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Montrer que sous un boost avec vitesse  $\mathbf{v}$  en direction quelconque, les coordonnées changent comme suit

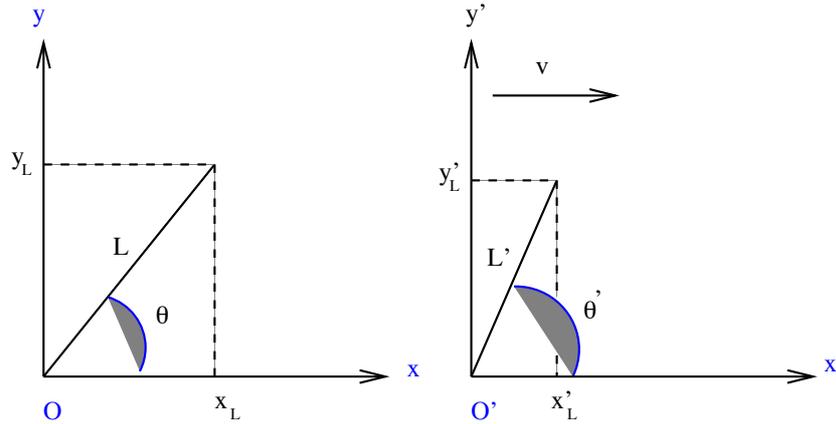
$$t' = \gamma(t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}/c^2), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\beta} - \gamma \mathbf{v}t,$$

où  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  et  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .

### Exercice 3: Contraction des longueurs relativistes

Deux repères  $S$  et  $S'$  sont en translation uniforme à la vitesse  $v$  (relativiste) suivant l'axe  $Ox$ . Une tige liée au repère  $S$ , de longueur au repos  $L$ , fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$ . Calculer la longueur  $L'$  et l'angle  $\theta'$  dans  $S'$ . Voir figure ci-jointe.

**Indication:** Comment mesurez-vous la longueur  $L'$ ? Considérez d'abord les cas les plus simples avec  $\theta = \pi/2$  et  $\theta = 0$ .



### Exercice 4: Accélération

- i) Une fusée à vitesse  $v$  par rapport à la terre est accélérée avec accélération propre  $a$  (parallèle à sa vitesse). C'est-à-dire elle subit une force  $F^\mu$  telle que  $\dot{p}^\mu = F^\mu$  avec  $F^i = ma^i$ . Ici  $m$  est la masse de la fusée au repos. Quelle est l'accélération de la fusée par rapport à la terre,  $dv/dt$ .
- ii) De deux jumeaux (disons Jean et Pierre) Pierre reste sur terre (supposée au repos) pendant que Jean entreprend un voyage spatial. La navette est construite telle qu'elle a une accélération (propre)  $g = 10m/s^2$ . Jean se déplace d'abord en une direction pendant 5 ans et après il tourne et il revient à la maison après 10 ans (de temps propre) de voyage total.

- Si Jean est parti à 20ans, quel est l'âge de Pierre au retour de Jean?
- Quelle vitesse acquiert Jean après 5 ans d'accélération?

Il y a des gens qui disent que c'est un paradoxe (paradoxe des jumeaux) car on pourrait aussi bien considérer que Jean est au repos et Pierre voyage, comme tout mouvement est relative, et alors Pierre devrait être plus jeune. Pourquoi ces gens ont-ils tort?

**Indication:** Utilisez les formules (1.82) du cours pour le temps propre.

## ELECTRODYNAMIQUE II

## Série 4

**Exercice 1: Transformations de Lorentz**

Une transformation de Lorentz est une matrice 4x4 réelle,  $\Lambda$ , qui satisfait à

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad \text{où} \quad g = \text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

En notation avec indices nous écrivons  $\Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\rho = g_{\nu\rho}$ . Montrer que

- $g^{-1} = g$ , où en notation avec les indices  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$  et  $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$ .
- $(\Lambda^T)^{-1} = g \Lambda g$ , où en notation avec les indices  $(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1} = \Lambda_\mu{}^\nu$ .
- Si  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont des transformations de Lorentz aussi  $\Lambda_1 \Lambda_2$  est une transformation de Lorentz.
- Si  $\Lambda$  est une transformations de Lorentz aussi  $\Lambda^{-1}$  en est une. (Donc les transformations de Lorentz forment un groupe.)
- Si  $\Lambda$  est une transformation de Lorentz  $|\Lambda_0^0| \geq 1$ .

**Exercice 2: Invariants de Lorentz du champ électromagnétique**

- a) Montrer que  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$  et  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  sont invariants sous les transformations de Lorentz  $\Lambda_\nu^\mu \in L_+^\uparrow$ .  
Indication: Utiliser les champs tensoriels  $F_{\mu\nu}$  et  $*F_{\mu\nu}$ .
- b) Si  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 + (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 \neq 0$ , il existe toujours une transformation de Lorentz telle que les champs transformés  $\mathbf{E}'$  et  $\mathbf{B}'$  soient parallèles.  
Indication: Essayer un boost de direction  $\mathbf{v}$  parallèle à  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ . Choisir l'axe  $\mathbf{e}_1$  parallèle à  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$  et utiliser les formules de transformation pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .
- c) Soit  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ . Montrer qu'il existe une transformation de Lorentz telle que le champ transformé  $\mathbf{B}' = 0$  si  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 > 0$  ou  $\mathbf{E}' = 0$  si  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 < 0$ .  
Indication: Utiliser a) et b).

### Exercice 3: Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique

Montrer que

$$T_{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) = \frac{1}{4\pi} \left( F_{0\alpha} F_0^\alpha - \frac{1}{4} g_{00} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad \text{et} \quad (1)$$

$$T_{0i} = -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})_i = \frac{1}{4\pi} F_{0\alpha} F_i^\alpha \quad (2)$$

## ELECTRODYNAMIQUE

## Série 6

**Exercice 1: Les paramètres de Stokes**

- i) Montrer que sous une rotation autour de la direction de propagation de l'onde,  $\hat{\mathbf{k}}$ , avec l'angle  $\varphi$ , les paramètres de Stokes se transforment comme

$$\begin{aligned} I &\rightarrow I \\ Q &\rightarrow Q \cos(2\varphi) + U \sin(2\varphi) \\ U &\rightarrow U \cos(2\varphi) - Q \sin(2\varphi) \\ V &\rightarrow V. \end{aligned}$$

- ii) Montrer que  $V = 0$  si et seulement si l'onde est linéairement polarisée.
- iii) Qu'est-ce que sont les unités de  $I$ ,  $Q$ ,  $U$  et  $V$  dans le système d'unités de Gauss?
- iv) Pour les paramètres de Stokes  $I = 3$ ,  $Q = -1$ ,  $U = 2$  et  $V = -2$  (en unités de Gauss) déterminer l'amplitude du champ électrique (à une phase totale près) dans les deux bases de polarisation (linéaire et circulaire). Dessiner l'ellipse de polarisation dans le plan  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  avec la bonne direction et le bon rapport des axes.

**Exercice 2: Rayonnement du fond cosmique (CMB)**

Dans l'univers il existe un rayonnement fossile micro-onde uniforme (à  $10^{-5}$  près), émis environ 300'000 ans après le *big bang*, qui a aujourd'hui une température d'environ  $2.7K$ . C'est appelé le 'CMB' (Cosmic Microwave Background). Sa densité d'énergie est  $aT^4$  où  $a = 7.6 \times 10^{-15} \text{erg} \cdot \text{cm}^{-3} \text{K}^{-4}$  est la constante de Stefan-Boltzmann. L'énergie moyenne des photons est environ  $3kT$  où  $k \simeq 1.4 \times 10^{-16} \text{erg/K}$  est la constante de Boltzmann.

- i) Calculer la densité (en nombre) de ces photons.
- ii) L'existence de ce rayonnement mène à des pertes importantes du flux de photons à très haute énergie, provenant de sources lointaines comme suit:  
Les collisions de deux photons à directions d'impulsion opposées engendrent la création d'une paire électron-positron si l'énergie est suffisante dans le "centre de masse" des deux photons (C'est le référentiel dans lequel la somme des impulsions des deux photons s'annule.). En prenant l'énergie d'un photon de  $3K$  comme  $E \sim kT$  calculez l'énergie nécessaire du photon incident pour créer une paire électron-positron. Prenez pour la masse de l'électron  $m_e c^2 = 0.5 \text{MeV}$ .

### Exercice 3: Effet Mössbauer

Une source nucléaire de rayons gamma est fixée sur l'axe d'un cylindre de rayon  $R$  et qui tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Attaché à la circonférence de ce cylindre se trouve un capteur qui mesure la fréquence des photons incidents. Calculer la fréquence  $\omega'$  mesurée par le capteur en fonction de la fréquence d'émission du photon  $\omega$ , du rayon du cylindre  $R$  et de sa vitesse angulaire  $\Omega$ .

## ELECTRODYNAMIQUE II

## Série 7

**Exercice 1: Réfraction et réflexion**

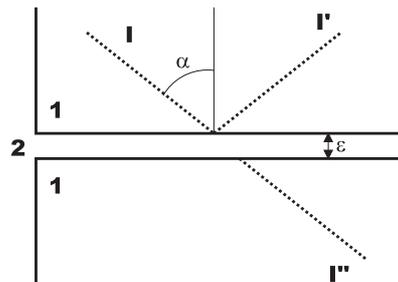
- a) Une collègue très riche essaye de t'éblouir avec son anneau de diamant (approximé par un plan infini. Elle est vraiment très riche...) en réfléchissant le soleil dans tes yeux. Quel pourcentage de la lumière est réfléchi en fonction de l'angle d'incidence pour les deux polarisations *i*) et *ii*) du cours (diamant:  $n = 2.417$ )? Peux-tu expliquer l'étincellement d'un vrai diamant par ce résultat?
- b) Tu es en train de nager sous l'eau. Décris ce que tu vois en regardant vers le haut (eau:  $n = 1.333$ ).

**Exercice 2: Polarisation**

La lumière du soleil réfléchi par l'eau t'éblouit sur ton bateau de physique devant les îles grecques. Tu aimerais donc construire des lunettes anti-solaires à partir des filtres polarisants. Comment dois-tu les orienter, et quelle pourcentage de la lumière peux-tu éliminer si le soleil émet de la lumière non polarisée? (discuter le résultat comme fonction de l'angle d'incidence)

**Exercice 3: Réflexion totale?**

Un rayon laser d'intensité  $I$  et longueur d'onde  $\lambda$  est réfléchi sous un angle  $\alpha = 60^\circ$  à l'interface entre le plexiglas (matériel (1),  $n = 1.49$ ) et l'air (matériel (2),  $n \simeq 1$ ). Quelle est l'intensité  $I'$  du rayon réfléchi et l'intensité  $I''$  du rayon transmis dans un deuxième bloc de plexiglas comme fonction de la distance  $\varepsilon$  entre les deux blocs?



## ELECTRODYNAMIQUE II

## Série 7

**Exercice 1: Réflexion et changement des phases**

Soit

$$\underline{E} = \text{Re} \left( \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)} \right)$$

une onde de fréquence  $\omega = 10^{11} \text{sec}^{-1}$  incidente sur un plan métallique avec une haute conductivité ( $\sigma = 10^{17} \text{sec}^{-1}$ ) et une constante diélectrique  $\varepsilon = 2$ . En utilisant

$$\underline{E}'' = \text{Re} \left( \underline{E}_0'' e^{i(\underline{k}''\underline{x} - \omega t)} \right)$$

calculer la différence entre les phases de l'onde incidente et de l'onde réfléchi pour les deux polarisations linéaires ( $\underline{E}$  ou  $\underline{H}$  perpendiculaire au plan d'incidence).

**Exercice 2: Modèle simple d'un métal**

- a) Calculer la constante diélectrique pour un matériel conductant en prenant pour les électrons dans un champ extérieur une équation de mouvement

$$m\ddot{\underline{x}} + \eta\dot{\underline{x}} = e\underline{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Le moment dipolaire par électron est alors  $\underline{p} = -e\underline{x}$  et on trouve la densité de polarisation  $\underline{P} = N\underline{p} = \chi_e \underline{E}$  (où  $N$  est le nombre d'électrons libres par volume).

- b) Calculer la résistance  $\rho$  à partir de (a).
- c) Discuter le resultat pour le cas de cuivre si on prend  $N \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ atoms/cm}^3$  et une conductivité à basse fréquence de  $\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{sec}^{-1}$ .
- d) Discuter la limite  $\omega \gg \eta/m$  et la transparence d'un métal à ces fréquences. Calculer en plus la pression sur un bloc de cuivre en fonction de la fréquence (incidence normale; la pression est le taux de change de l'impulsion par unité de temps par surface).

## ELECTRODYNAMIQUE II

## Série 9

**Exercice 1: Relations Kramers-Kronig**

Calculer la partie réelle de  $\epsilon(\omega)$  en utilisant les relations Kramers-Kronig pour

$$\text{a) } \text{Im } \epsilon = \lambda[\theta(\omega - \omega_1) - \theta(\omega - \omega_2)], \quad \omega_2 > \omega_1 > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

$$\text{b) } \text{Im } \epsilon = \frac{\lambda\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad \lambda, \gamma, \omega_0 \in \mathbb{R}_+,$$

$$\text{c) } \text{Im } \epsilon(\omega) = \frac{(\epsilon_0 - 1)\omega}{1 + \omega^2}, \quad \epsilon_0 > 1.$$

Comparer les résultats avec l'exemple de  $\epsilon(\omega)$  traité au cours. Dessiner le comportement de la partie réelle et imaginaire de  $\epsilon(\omega)$  pour au moins un des cas.

La fonction de Heaviside,  $\theta$  est donnée par

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

**Exercice 2: Vitesse de groupe et de phase**

Calculer la vitesse de groupe et la vitesse de phase pour un matériel avec la constante diélectrique

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{1 - i\omega}$$

(comparer avec le premier exercice) pour  $\epsilon_0$  proche de 1. Discuter les limites  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ . Commenter sur  $\epsilon(\omega \rightarrow \infty)$  en comparaison avec un plasma.

### Exercice 3: Formalisme Lagrangien en Optique

Démontrer que l'équation de mouvement des rayons de lumière (avec  $\sigma$  comme paramètre de longueur d'arc)

$$\frac{d}{d\sigma} \left( n(\mathbf{x}(\sigma)) \frac{d\mathbf{x}(\sigma)}{d\sigma} \right) = \nabla n(\mathbf{x})$$

est l'équation d'Euler-Lagrange de l'action

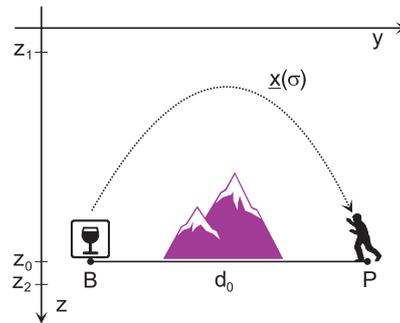
$$S = \int_{P_1}^{P_2} n(\mathbf{x}(\sigma)) d\sigma$$

### Exercice 4: Fata Morgana

Analyser le phénomène de la Fata Morgana en approximant l'index de réfraction par une fonction linéaire de la hauteur  $z$ :

$$n(z) = \alpha z, \quad 0 < z_1 < z < z_2$$

Un pauvre randonneur se trouve au milieu d'un désert au point  $P$ . Il voit au ciel



un joli bar qui se trouve en effet au point  $B$  sur la même hauteur  $z_0$  que  $P$ , séparé par quelques montagnes de  $P$  (voir croquis).

- Déterminer les orbites de la lumière émise de  $B$  dans un milieu avec index de réfraction  $n(z)$ . (ne considérer que le plan  $[x = 0, y = y(\sigma), z = z(\sigma)]$ )
- Trouver la fonction  $z(y)$ .
- Déterminer l'orbite indiquée dans le croquis en fonction de la distance  $|BP| = d_0$ .
- Déterminer la direction limite ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) du mouvement  $(y(\sigma), z(\sigma))$ .

## ELECTRODYNAMIQUE II

### Série 10

#### Exercice 1: Mesure sur une sphère

Calculer la déterminante de Jacobi pour un changement de coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques en trois dimensions. Déterminer l'élément de surface de la sphère  $\mathbb{S}^2$ ,  $d\Omega$ .

#### Exercice 2: Quelques Intégrations

Calculer les intégrales suivantes:

a)  $\frac{1}{4\pi} \int n_\ell d\Omega$

b)  $\frac{1}{4\pi} \int n_\ell n_m d\Omega$

c)  $\frac{1}{4\pi} \int n_\ell n_m n_j d\Omega$

d)  $\frac{1}{4\pi} \int n_\ell n_m n_j n_k d\Omega$

e) (facultatif)  $\frac{1}{4\pi} \int n_{\ell_1} n_{\ell_2} \cdots n_{\ell_k} d\Omega$

#### Exercice 3: Intensités des multipôles

En utilisant les formules (4.19) et (4.20) du cours,

$$\frac{dP}{d\Omega} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})r^2 = \dots ,$$

établir les formules (4.22)-(4.24), c'est-à-dire calculer la puissance totale et par angle du dipôle électrique et magnétique et du quadrupôle électrique. Montrer que les termes mixtes dans (4.20) disparaissent après intégration sur les angles.

## ELECTRODYNAMIQUE II

## Série 10

**Exercice 1: Perte d'énergie au CERN**

L'énergie par électron du LEP a été de 100 GeV et le courant total des électrons de 4 mA. La longueur du tunnel circulaire est 26.66 km. (On peut supposer la vitesse  $v_e = c$  des électrons.)

- i) Combien d'électrons y a-t-il dans le faisceau entier à tout moment?
- ii) Calculer la perte d'énergie totale par radiation synchrotron.
- iii) A l'LHC l'énergie finale par particule est de 7 TeV. Le nombre de particules dans le faisceau nominale est  $3.23 \times 10^{14}$ . Le tunnel est le même, mais les particules accélérées sont des protons. Calculer la perte d'énergie totale par radiation synchrotron.
- iv) Quelle serait cette perte si les particules étaient des électrons?

**Exercice 2: Mouvement d'une particule dans un champ magnétique**

Considerer des champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  constants à un angle  $\theta$  ( $\cos \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} / (|\mathbf{E}| |\mathbf{B}|)$ ).

- i) Ecrire l'équation de force (relativiste) pour une particule chargée dans ces champs.
- ii) Montrer que pour  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_z$  ( $\cos \theta = 1$ ), on peut choisir les axes tels que la solution est de la forme

$$x(\tau) = AR \sin(c\tau/R), \quad y(\tau) = AR \cos(c\tau/R), \quad z(\tau) = \frac{R}{\rho} \sqrt{1+A^2} \cosh(\rho c\tau/R),$$

ici  $\tau$  est le temps propre,  $R = \frac{mc^2}{eB}$ ,  $\rho = \frac{E}{B}$  ( $A$  est une constante d'intégration.)

Qu'est-ce qu'est la signification physique de  $A$ ?

*Indication:* Les calculs se simplifient si on pose  $c = 1$  pour cette exercice.

iii) Calculer la puissance émise par cette charge accélérée (Moyenée sur une période).

*Indication:* Utiliser la formule de Larmore relativist (4.48) du cours. Attention, dans cette formule  $\dot{\beta} = d\beta/dt$  et  $\beta = v/c = (dx/dt)/c$ .

### **Exercice 3: Etoile à neutrons**

Considerer une étoile à neutrons en rotation avec vitesse angulaire  $\underline{\omega}$  et un moment magnétique dipolaire  $\underline{\mu}$  qui n'est pas parallèle à  $\underline{\omega}$ . Calculer la perte d'énergie par radiation dipolaire (magnétique) pour une étoile à neutrons avec une période  $T = 2\pi/\omega = 1$  seconde et d'un rayon  $R = 12$  km. L'angle entre  $\underline{\omega}$  et  $\underline{\mu}$  soit  $\pi/2$ , et le champs magnétique aux poles soit  $10^{12}$  Gauss. Comparer avec la luminosité du soleil ( $3.9 \cdot 10^{33}$  erg/sec).

### **Exercice 4: Libre parcours moyen**

Calculer la distance de libre parcours moyen d'un photon dans un gaz d'électrons au repos à une densité de  $\rho_e = 10^{24}\text{cm}^{-3}$ .