Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015

Série d'exercices 4

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

1. **Démonter que**

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}.$$

2. **Soit**

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

avec $0 \leq r < 1$.
a) Vérifier que quand $r \to 1$ **la fonction** $P_r(\theta)$ **forme une suite de Dirac (avec** $r \to 1$ **au lieu de** $n \to \infty$**).**
Indication : Poser $z = re^{i\theta}$**, puis calculer** $\mathrm{Re}\,\frac{1+z}{1-z}$**. Ensuite utiliser l'exercice 6 de la serie 8 pour calculer l'integrale.**
b) Soit f **une fonction entiere et** ∂D **le bord du disque unité orienté positivement. Rappelons la formule de Cauchy :**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Si on ecrit $F(\theta) = f(e^{i\theta})$**, alors démontrer que**

$$f(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} F * P_r(\phi).$$

c) Soit $t : \partial D \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et posons $T(\theta) = t(e^{i\theta})$. Montrer que $u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} T * P_r(\theta)$ est l'unique fonction harmonique sur D qui coincide avec T sur ∂D.
Indication : Pour prouver l'existance, se rappeler du lien entre les fonctions harmoniques et les fonctions holomorphes. Pour l'unicité, utiliser le principe du maximum.

3. Soit $R > 0$ et f une fonction holomorphe dans un voisinage de $D(0,R) = \{z \mid |z| < R\}$ avec $f(z) \neq 0$ si $z = 0$ ou si $|z| = R$.

Le but de l'exercice est de montrer que si $z_1 \cdots z_N$ sont les zeros de f dans $D(0,R)$, alors

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{N} \log\frac{|z_k|}{R} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(Re^i\theta)|d\theta.$$

(a) **Ecrire f comme un produit de polynomes de degrés 1 et d'une fonction g qui ne s'annule pas dans un voisinage de $D(0,R)$.**
Indication : Si une fonction holomorphe s'annule en z_0 , utiliser sa serie en z_0 pour montrer qu'elle se factorise par $(z-z_0)$.

(b) Déduire des propriétés du $\log$ **qu'il suffit de montrer le théoreme dans le cas ou f est un monome et dans le cas ou f n'a pas de zéros dans le disque de rayon R.**
Indication : remplacer f par la factorisation de la question précédente .

(c) En supposant que $f(D(0,R)) \subset U$ avec U un ouvert simplement connexe borné qui ne contient pas de zero de f, montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(Re^i\theta)|d\theta = \log|f(0)|$. (On pourra utiliser l'exercice 6 de la série 8)

(d) En déduire le théoreme dans le cas ou la fonction g satisfait la condition du point précédent.

4. Soit g une fonction entiere telle qu'il existe $C, s > 0$ satisfaisant

$$\operatorname{Re} g(z) < C|z|^s.$$

(C'est a dire que la partie reele de g ne croit pas trop fort). Le but de l'exercice est de montrer que g est un polynome de degré au maximum $[s]$.

(a) **Calculer les coefficients de Fourier $\hat{f}(n)$ de $f(\theta) = g(Re^{i\theta})$ (R>0).**

(b) Faire de même pour $\overline{f}$.

(c) Obtenir une borne de chaque coté de l'integrale

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (CR^s - \operatorname{Re} g(Re^{i\theta}))e^{-in\theta}d\theta\right|$$

(d) Conclure en laissant R tendre vers l'infini.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015

Série d'exercices 5

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

1. a) Déterminer les polynomes $P(x)$ de degré 1 orthogonaux a la fonction $f(x) = 1$ en utilisant le produit scalaire suivant :

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx = 0.$$

b) En supposant que deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ sont orthogonaux (avec le produit scalaire précédent), trouver une relation entre leurs coefficients.
Indication : Calculer $\int_0^\infty x^k e^{-x}dx$.

2. On sait deja que $\sum n^{-2} = \pi^2/6$. En 1730 environ Euler a egalement trouvé que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Utiliser la formule de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 = \|f\|^2,$$

pour le demontrer.

3. Le but de l'exercice est de déterminer la somme des n^{-2k}. Les questions peuvent (presque) traitées séparément, si vous n'arrivez pas une question vous pouvez utiliser la réponse par la suite.

(a) **Soit $f(z) = \frac{\pi}{tan(\pi z)}$. Déterminer pour $f(z)$ les poles et les résidus en ces poles si** $\operatorname{Re} z \in [-1, 1]$**.** On a déjà calculé en exercice tous les zéros de la fonction $sin(z)$.

(b) **Montrer que f est 2 périodique et en déduire pour $f(z)$ tous les poles et tous les résidus en ces poles.**

(c) **Soit** $n, k \in \mathbb{N}^*$ **et Γ_n le rectangle passant par les sommets** $\{-n-1/2-in, -n-1/2+in, +n+1/2-in, +n+1/2+in\}$**. Dessiner grossièrement Γ_n.** Montrer que pour $z \in \Gamma_n$ on a $|z|^{2k} > n^2$ et $|f(z)| < 3\pi$.

(d) **Calculer avec le théoreme des résidus $I_n = \int_{\Gamma_n} f(z)/z^{2k}dz$, et séparément déduire du point précédent que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.**

A ce point de l'exercice, la dernière formule se réécrit comme

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{z^{2k}}, 0\right) = -2\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2k}.$$

(e) **Montrer que $f(z) = i\pi + \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}$ puis calculer $\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{z^{2k}}, 0\right)$ en utilisant l'exercice 6 de la série 6 .**

(f) Conclure que $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2k} = \frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{-2(2k)!}$.

Pourquoi est-ce que l'argument ne marche pas si on essaie avec $2k+1$? On notera qu'actuellement on ne connait même pas le résultat si on met 3 au lieu de $2k$.

4. **Démontrer que dans l'espace $l^2(\mathbb{Z}) = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2 < \infty\}$ chaque suite de Cauchy converge.**

   Indication : Rappelons que la norme est donnée par $\sqrt{\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2}$. Pour deviner la limite d'une suite, imaginer que l'on ne regarde que des fonction avec support $[-k, k]$ et passer k a la limite.

5. Trouver une suite de fonction qui converge dans $L_2([-\pi, \pi])$ mais qui ne converge pas simplement.

   Indication : Il s'agit de trouver une suite de fonction dont l'aire tend vers 0 (par exemple des rectangles dont la largeur diminue et dont le centre bouge) telle que pour chaque x, on peut trouver un n aussi grand que l'on veut avec $f_n(x) = 1$ (i.e. x est au sommet du rectangle n).

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015

Série d'exercices 8

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

1. Calculer la série de cosinus de la fonction f définie sur $(-3,3)$ avec $f(x) = 1$ pour $-1 < x < 1$ et $f(x) = 0$ ailleurs.

2. Trouver la solution générale du problème de type Sturm-Liouville suivant : $0 < x < L$,

$$X'' + \lambda X = 0$$

et $X'(0) = 0$ **et** $X'(L) = 0$.

3. Utiliser la méthode de séparation de variables pour séparer l'équation suivante :

$$tu_{xx} + xu_t = 0,$$

où $u = u(x,t)$. (Il n'est pas nécessaire de résoudre ces équations ensuite.)

4. Est-il possible de séparer l'equation

$$u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0?$$

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015

Série d'exercices 9

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui est égale à 1 si $|x| < a$ et égale à 0 sinon.

2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-\pi(x-a)^2}$. Vous pouvez utiliser le fait que $\hat{g}(\omega) = e^{-\pi\omega^2}$ quand $g(x) = e^{-\pi x^2}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et l'équation différentielle

$$u'' - u = f.$$

Exprimer la transformée de Fourier de u en fonction de la transformée de f. (On suppose que toutes les fonctions sont dans la classe de Schwartz.)

4. Calculer la transformée de fourrier de

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015, printemps
Exercices 10

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Soit

$$K(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

Démontrer que cette fonction vérifie l'équation de la chaleur:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}\right) K(t,x) = 0.$$

2. Calculer la transformée de Fourier de $K(t,x)$ par rapport à la variable x.

3. Soit f une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

4. Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,x)dx.$$

5. Pouvez-vous trouver une autre fonction que $e^{-\pi x^2}$ qui soit égale à sa transformée de Fourier? (*Suggestion: Chercher parmi les fonctions de la forme $P(x)e^{-ax^2}$, où P est un polynôme.)*

6. Trouver une fonction $y(u)$ qui vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(u)du}{(x-u)^2+a^2} = \frac{1}{x^2+b^2}$$

avec $0 < a < b$. Les formules suivantes peuvent être utiles:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{2b}e^{-b\omega} \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} e^{-c\omega}\cos\omega x d\omega = \frac{c}{x^2+c^2}.$$

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015

Série d'exercices 13

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

1. Résoudre l'équation

$$y''(x) + 4y(x) = e^x,$$

avec les conditions $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$**.**

2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-\pi x^2}$ **en utilisant le théorème des résidus.**

3. Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt.$$

Indication - Ramener l'intervalle d'intégration à $[0, 2\pi]$ *puis obtenir une intégrale sur le cercle.*

4. Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ satisfaisant $f_1(x) = f_2(x) = 0$ si $x < 0$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(s-t) dt = \int_0^s f_1(t) f_2(s-t) dt.$$

Remarque : Comme la transformée de Laplace ne s'intéresse qu'aux valeurs $f(x)$ pour $x > 0$, on peut supposer que les fonctions sont nulles pour $x < 0$ lorsque l'on fait les calculs.

Problème 2, la serie 13, très bonne exercise, un peu differente que le cas nous avons traité en cours hier.

D'abbord on se rappel que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1.$$

La fonction $e^{-\pi z^2}$ est holomorphs partout, donc elle n'a aucun singularité, donc en vue de la théorème de Cauchy (cas particulier de la théorème de residues quand on n'a aucun residus) on a que le integral

$$\int_C e^{-\pi z^2}dz = 0$$

pour toute chemin fermée C.

On va applique ca pour le contour rectangle avec une côte $[-R, R]$ et les autres entre les points $\pm R + i\omega$.

Affirmation: pour ω fixé quand R tend vers infinie les integrals les deux côtes verticales tendent vers 0. (mettre $z = \pm R + it$ dans $e^{-\pi z^2}$ et conclure.)

Donc, dans le limit le intgeral sur le droite reelle (qui est egale a 1) est egale a la limite de l'integrale sur le droite $[-R + i\omega, R + i\omega]$

Mettre $z = t + i\omega$ dans la formule , verifier que

$$\int_{-R+i\omega}^{R+i\omega} e^{-\pi z^2}dz = \int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2}e^{-2\pi it\omega}e^{\pi\omega^2}dt.$$

La limit quand R tend vers infinie est 1 (comme remarqué avant) et noter que le facteur $e^{\pi\omega^2}$ ne depend pas de t, donc on peut le sortie. Alors

$$e^{\pi\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}e^{-2\pi it\omega}dt = 1$$

et ca implique la conclusion.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015
Exercices 1

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Déterminer ses vecteurs propres et valeur propres. Trouver le ON- base correspondent. Exprimer le vecteur
$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
dans cette base. Calculer Av dans les deux manières: prémièrement en utilisant la définition de la multiplication matriciel et deuxièmement en utilisant les valeurs propres.

2. Avec le produit scalaire habituel pour les fonctions sur $[0, 1]$**, vérifier que** $f_k(x) = \sin(2\pi kx)$ **et** $g_k(x) = \cos(2\pi kx)$**, forment une famille des fonctions orthogonaux, où** k **sont entières.**

3. Soit $\Delta f(x) = -f''(x)$. Vérifier que $g_\omega(x) = \sin(\omega x)$ soit une fonction propre, au sens de $\Delta g = \lambda g$. Calculer le valeur propre λ correspondent.

4. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f(\theta) = (\pi - \theta)^2/4$**, où** $0 \leq \theta \leq 2\pi$**.**

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015

Exercices 2

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Calculer la série de Fourier de la fonction 2π–périodique donnée par

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, \ \textbf{pour } |x| \leq \pi.$$

2. Calculer la série de Fourier de la fonction 2π–périodique donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \textbf{for } \ 0 \leq x \leq \pi \\ -\frac{\pi}{4} & \textbf{for } \ -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

3. Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction avec série de Fourier

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(kx) + \sum_{k \geq 1} b_k \sin(kx).$$

Calculer les séries de Fourier de $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Quelle est la parité de ces fonctions?

4. Soit $f(\theta) = |\theta|$ sur $[-\pi, \pi]$. Dessiner le graph de f et démontrer que

$$\hat{f}(n) = (-1 + (-1)^n)/\pi n^2$$

si $n \neq 0$ et $\hat{f}(0) = \pi/2$. Exprimer la série de Fourier de $f(\theta) = |\theta|$ sur $[-\pi, \pi]$ en terms de sinus et cosinus.

5. Entre les années 1650 et 1734 c'etait un problème célèbre ("le problème de Bâle") de calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Trouver cette solution. Indication: mettre $\theta = 0$ dans les formules de l'exercise 4.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015, printemps
Exercices 3

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Soit g une fonction L-périodique et $\hat{g}(n)$ ses coefficients de Fourier. Soit $a \in \mathbb{R}$ et on considère $h(x) = g(x+a)$. Exprimer $\hat{h}(n)$ en termes de $\hat{g}(n)$.

2. Soit g une fonction continue, dérivable et L-périodique. Vérifier que le 0 coefficient de Fourier de la derivée de g est zero, c'est-à-dire $\hat{g'}(0) = 0$.

3. Soit $f(t) = 1$ si $t \in (-\pi, 0)$ et $f(t) = 0$ si $t \in [0, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier (sur $[-\pi, \pi]$) et vérifier que la série de Fourier n'est pas absolument convergente.

4. En utilisant le théorème des résidus (intégrales trigonométriqués), calculer la série de Fourier de $f(x) = \frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}$. A l'aide de la série géométrique, vérifier que $\sum_{k\geq 0} \frac{\cos(kx)}{2^k}$ est bien égal à $f(x)$.

5. Soient f et g deux fonctions integrable et 2π-périodiques. On considère le produit de convolution dans $[-\pi, \pi]$

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(t-x) dx.$$

Démontrer que $f * g = g * f$.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015, printemps
Exercices 6

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. ***Fonctions de Rademacher.***

a) Pour $k = 0, 1, 2, ...$ dessiner les focntions

$$r_k(x) = sign(\sin(2^k \pi x)).$$

Démontrer que $\{r_k\}_{k\geq 0}$ est un système orthonormal dans $L^2([0,1], \mathbb{R})$.

b) Démontrer que $\{r_k\}_{k\geq 0}$ n'est pas un système complet pour $L^2([0,1], \mathbb{R})$.

Indication: Chaque fonction, qui est symétrique par rapport à la droite $x = 1/2$, est orthogonale à r_k pour tout $k \geq 1$.

2. Vérifier que pour n'importe quel produit scalaire pour un espace vectoriel sur les nombre complexes, on a

$$(f, g) = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\,\|f+ig\|^2 - i\,\|f-ig\|^2\right).$$

Déduire que pour deux fonctions integrables et 2π-périodiques f et g on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}.$$

3. Combien de termes de la série de Fourier pour la base de Haar sont neécessaires pour approximer la fonction $f(x) = x$ sur $[0, 1]$ avec un erreur maximale de 0.01? Ceci n'est pas possible avec le système orthogonal $\{\sin k\pi x\}_{k\geq 1}$. Justifier pourquoi.

4. Le but de l'exercice est de donner un exemple de fonction continue avec série de Fourier divergente.

a) Démontrer que le système $\{\cos(kx)\}_{k\geq 0}$ est orthogonal et complet dans $L^2([0,\pi], \mathbb{R})$.

b) Calculer les coefficients de Fourier dans la base $\{\cos(kx)\}_{k\geq 0}$ pour la fonction $\sin(Nx)$ définie sur $[0, \pi]$.

c) Soit la fonction paire sur $[0, \pi]$ qui est donnée par

$$f(x) = \sin(2x) + \frac{\sin(2^4 x)}{4} + \frac{\sin(2^9 x)}{9} + ... = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{m^2} x)}{m^2}.$$

Démontrer que f est une fonction continue et calculer ses coefficients de Fourier a_k dans la base $\{\cos(kx)\}_{k\geq 0}$.

d) Soit $S_n(0) := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que $S_n(0)$ ne converge pas vers $f(0)$, pour $n \to \infty$.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015, printemps
Exercices 7

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. a) On considère l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - 5\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = 0,$$

où $x \in [0,1]$ et $t \geq 0$. Utiliser la méthode de la séparation des variables pour trouver des solutions à cette équation aux dérivés partielles.

b) On introduit des novelles variables $v := x + \frac{1}{\sqrt{5}}t$ et $w := x - \frac{1}{\sqrt{5}}t$. Démontrer que l'équation se transforme en

$$\frac{\partial^2}{\partial v \partial w}U(v,w) = 0.$$

et que la solution générale puisse s'écrire comme $U(v,w) = G(v) + F(w)$.

2. a) On considère une corde fixée à ses deux côtés et avec vitesse de propagation égale à $C > 0$. Alors le déplacement $u(x,t)$ de la corde satisfait l'équation des ondes ayant les conditions aux bords

$$u(0,t) = 0 = u(1,t)$$

pour tout t. En plus, on suppose la condition initiale $u(x,0) = f(x)$, où f est une fonction lisse. Trouver la solution génerale de ce problème.

b) Si $f(x) = 4\cos(2\pi x)$, alors quelle est la solution plus précise dans le point a).

3. Si γ et ψ sont deux fois continûment différentiables, la fonction $u(x,t) = \gamma(x+at) + \psi(x-at)$ est une solution de l'équation des ondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$. Déterminer les fonctions γ et ψ pour satisfaire les conditions (avec f et g convenables)

$$u(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{pour } 0 < x < l \text{ (conditions initiales)}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0 \text{ (conditions aux bords).}$$

Le résultat est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+at) + f(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds. \tag{0.1}$$

4. La fonction $u(x,t)$ de (0.1) est bien définie tant que $[x-at, x+at] \subset [0,l]$. Comme faut-il prolonger les fonctions f et g en dehors de l'intervalle $[0,l]$ pour que (0.1) soit une solution pour $x \in [0,l]$ et pour tout $t \geq 0$. Discuter les conditions sur f et g afin que $u(x,t)$ soit deux fois continûment différentiable.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015, printemps
Exercices 11

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Soit

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}, y > 0.$$

Démontrer par un calcul que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\omega|y} e^{2\pi i\omega x} d\omega = P_y(x).$$

2. Déduire sans gros calculs que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) e^{-2\pi i x\omega} dx = e^{-2\pi|\omega|y}.$$

3. Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Calculer $f * f$.

4. Soit g une fonction dans la classe de Schwartz. Si on applique la tranformée de Fourier $\mathfrak{F}$ à g quatre fois, quelle fonction obtiendra-t-on?

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015, printemps
Exercices 12

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Calculer la transformée Laplace de $y(t) = \sin(at)$**, pour** $a > 0$**, avec la défintion (pas le tableau).**

2. Utilisant la transformée Laplace, resoudre l'equation differenteil ordinaire:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}$$

ou $y(0) = 1$ **et** $y'(0) = 5$**.**

3. Resoudre l'equation type inteégrale suivant:

$$f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau)e^{1-\tau}d\tau,$$

c'est-à-dire, trouver $f(t)$.