Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015
Série d'exercices 1

Si vous avez des questions ou des remarques : `Jeremy.Dubout@unige.ch`

Rappel : L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$, et pour $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ avec a, b réels on définit $\mathrm{Re}(\alpha) = a$, $\mathrm{Im}(\alpha) = b$.

1. Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$, avec x et y réels :

   (a) $(-1 + 3i)^{-1}$
   (b) $(1 + i)(1 - i)$
   (c) $(1 + i)(2 - i)$
   (d) $(i - 1)(2 - i)$
   (e) $(7 + i\pi)(\pi + i)$
   (f) $(2i + 1)\pi i$
   (g) $\sqrt{2}i(\pi + 3i)$
   (h) $(i + 1)(i - 2)(i + 3)$

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que $\overline{\alpha}\overline{\beta} = \overline{\alpha\beta}$ et que $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.

3. Soit $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$. Exprimer $\mathrm{Re}(\alpha)$ et $\mathrm{Im}(\alpha)$ en fonction de $\alpha, \overline{\alpha}$, puis montrer que $\mathrm{Im}(\alpha) \leq |\mathrm{Im}(\alpha)| \leq |\alpha|$.

4. Décrire géométriquement les ensemble de points z satisfaisant les conditions suivantes :

   (a) $|z - i + 3| = 5$
   (b) $|z - i + 3| > 5$
   (c) $|z - i + 3| \leq 5$
   (d) $|z + 2i| \leq 1$
   (e) $\mathrm{Im}\, z > 0$
   (f) $\mathrm{Im}\, z \geq 0$
   (g) $\mathrm{Re}\, z > 0$
   (h) $\mathrm{Re}\, z \geq 0$

5. Écrire les nombres complexes suivants sous forme polaire :

   (a) $1 + i$
   (b) $1 + i\sqrt{2}$
   (c) -3
   (d) $4i$
   (e) $1 - i\sqrt{2}$
   (f) $-5i$
   (g) -7
   (h) $-1 - i$

6. Écrire les nombres complexes suivants sous forme cartésienne $(x + iy)$:

   (a) $e^{3i\pi}$ (c) $3e^{i\pi/4}$ (e) $e^{2i\pi/6}$ (g) $e^{-i\pi}$

   (b) $e^{2i\pi/3}$ (d) $\pi e^{-i\pi/3}$ (f) $e^{-i\pi/2}$ (h) $e^{-5i\pi/4}$

7. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que l'équation $x^2 = \alpha$ admet deux solutions distinctes.

8. Décrire l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} | e^z = 1\}$, puis pour $\alpha \in \mathbb{C}$, trouvez les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $e^z = \alpha$.

9. Soit $f(z) = 1/z$. Décrire l'action de f sur les points à l'intérieur, à l'extérieur puis sur le cercle unité. On appele cette application l'**invertion** par rapport au cercle unité.

10. Soit $f(z) = 1/\overline{z}$. Décrire l'action de f sur les points à l'intérieur, à l'extérieur puis sur le cercle unité. On appele cette application la **réflextion** par rapport au cercle unité.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015
Série d'exercices 1*

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les exercices en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths). Pour les physiciens qui ne savent pas ou c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

1. **Écrire chacun de ces nombres complexes en coordonnées polaires :**

   (a) $5i$ **(c)** e^{1+i} **(e)** $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

   (b) $-1-i$ **(d)** $(1+i\sqrt{3})/2$ **(f)** $1+e^{-i\pi/6}$

2. **Identifier chacun de ces nombres complexes :**

   (a) $1/(2-i)$ **(c)** $|4+i|$

   (b) $(2+3i)^3$ **(d)** $\cos(7)e^{13i\pi/2}$

3. **Calculer les racines des polynômes suivants :**

   (a) z^3-8 **(b)** z^8+1 **(c)** z^4-2z^2+2

4. Décrire géométriquement les parties du plan complexe définies par

   (a) $|2z+1+i|<4$;

   (b) $2\operatorname{Re} z+3\operatorname{Im} z\geq 4$;

   (c) $|z|\leq|z+1|$;

   (d) $0<|2z-1|\leq 2$.

   (e) $|\arg z|\geq\pi/3$.

   Lesquels de ces ensembles sont ouverts, fermés, bornés, compacts ?

5. Soit $D = \{z;\ |z| > 1\}$, l'exterieur du cercle unité. Demontrer que la transformation de Joukowski
$$f\colon D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$
considérée comme une application de D dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, est bijective. Étudier l'application inverse $f^{-1}\colon w \mapsto z$. Dessiner les images inverses des droites $\operatorname{Im} w = Const$ (écoulement "potentiel" autour d'un cylindre).
   Indication. L'image de $z = e^{i\varphi}$ est $w = cos\varphi$.

Pour aller plus loin :

$\overrightarrow{\nabla}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|\cos(z)^2| + |\sin(z)^2| = \alpha$.

Indication :

(a) On rappel que pour $z \in \mathbb{C}$, $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$. Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$.

(b) En utilisant le développement en série de cos et sin, montrer de façon simple que $\cos \overline{z} = \overline{\cos z}$ et que $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$.

(c) Choisir judicieusement u et v pour se ramener à l'équation de l'énnoncé.

(d) Montrer que $\cos(iz) = \cosh z$ puis résoudre $\cos(u - v) = \alpha$.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015

Série d'exercices 2 : $\mathbb{C}$-différentiabilité et equations de Cauchy-Riemann

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths). Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

1. **Démontrer qu'une application $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme**
$$f(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$$
est $\mathbb{C}$-linéaire (i.e. $f(az) = af(z)$, $a \in \mathbb{C}$) si et seulement si $\mu = 0$.

2. **On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ avec l'application $(x, y) \mapsto x + iy = z$. On introduit les opérateurs de dérivation complexe suivants :**
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \quad \textbf{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$
Pour cet exercice, on supposera que les fonctions sont suffisamment differentiables (au sens réel).
   (a) **A l'aide des équations de Cauchy-Riemann, montrer que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si**
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0.$$
   (b) **Montrer que**
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \overline{f} = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial z} f\right)}.$$
   (c) Soit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$ le Laplacien . Montrer que $\Delta f = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} f$.

3. (a) **Montrer que si $f(z)$ est holomorphe sur un ouvert U, alors $\overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur $\overline{U} = \{z \in \mathbb{C} | \overline{z} \in U\}$.**
   (b) Montrer que si f est holomorphe, alors on a :
$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} f \quad \text{et} \quad \Delta |f|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

(Rappel : pour $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, avec $u(x,y)$ et $v(x,y)$ des fonctions réelles, on a $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + i\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) - i\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)$).

4. Soit f une fonction polynomiale en x et y. Montrer que f est holomorphe si et seulement si f est polynomiale en $z = x + iy$.

5. **Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U avec $f = u + iv$ (u, v réelles). A l'aide des equations de Cauchy-Riemann, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :**
   (a) f est constante,
   (b) u est constante,
   (c) v est constante,
   (d) $\overline{f}$ est holomorphe,
   (e) $|f|$ est constante.

   Indication : Montrer $e \Rightarrow d \Rightarrow a \Rightarrow e$ et $b \Leftrightarrow c$ et $(b \; et \; c) \Leftrightarrow a$.

6. Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions holomorphes sur un ouvert U telles que $\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2$ est constante. A l'aide des résultats des exercices précédents, montrer en deux lignes que chaque f_i est constante.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015

Série d'exercices 3: Séries et fonctions analytiques

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Définissons $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ **et** $\cos(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$**. Calculer les trois premiers termes de la série**

$$e^x / \cos(x).$$

2. Trouver une solution $u(x,y)$ **du problème de Dirichlet suivant:**

$$\Delta u = 0 \text{ sur } \Omega = [0,1]\times[0,1], \quad u(x,0) = u(0,y) = 0, \quad u(x,1) = x, \quad u(1,y) = y.$$

Indication. **Considérer la partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction holomorphe (polynomiale très simple).**

3. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ **où:**

1) $a_n = (\log n)^2$
2) $a_n = n!$
3) $a_n = \frac{n^2}{4^n + 3n}$.
4) Déterminer le domaine de définition de la fonction de Bessel d'indice r **définie par la série suivante**

$$J_r(z) = (\frac{z}{2})^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!(k+r)!} z^{2k}.$$

5. Déterminer les coefficients de la série

$$f(z) = \frac{z^2 + 11z - 2}{(2z-1)(z^2-4)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

et calculer son rayon de convergence. Pour une fraction rationnelle arbitraire, deviner une formule pour le rayon de convergence. Quel est le rayon de convergence de la série qu'on obtient si l'on développe la fonction $f(z)$ autour du point $c = 1$?

Indication. Décomposer en fractions simples.

6. Soient $\{a_n\}_{n=1}^N$ et $\{b_n\}_{n=1}^N$ deux suites finies de nombres complexes. Soit $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ et par convention on pose $B_0 = 0$. Démontrer l'égalité suivante (la sommation d'Abel):

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

En utilisant la sommation d'Abel démontrer que:

1) La série $\sum n z^n$ ne converge pour aucun point du cercle unité.
2) La série $\sum z^n/n^2$ converge pour tout point du cercle unité.
3) La série $\sum z^n/n$ converge pour tout point du cercle unité, sauf le point $z = 1$.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015
Série d'exercices 4: Séries et fonctions analytiques

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Déterminer toutes les racines complexes des équations suivantes: $\sin z = 0, \cos z = 0, \exp(2z) - 6\exp z + 5 = 0$**.**

2. Montrer que

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-2)^n, \quad |z-2| < 1,$$

et

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)(z+2)^n, \quad |z+2| < 1.$$

3. Soit f une fonction analytique sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Montrer que si f n'est pas constante au voisinage de $z_0 \in U$, il existe un voisinage V de z_0 sur lequel on a

$$z \in V \text{ et } f(z) = f(z_0) \Rightarrow z = z_0.$$

4. Soit $\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(z-1)^n/n$ pour $|z-1| < 1$. Montrer que $\exp\log(z) = z$. *Indication.* Utilisez ce que vous connaissez déjà pour z réel.

5. Montrer que l'équation cubique

$$z^3 - 3z - w = 0 \quad (1)$$

possède une solution unique proche de 0 si w et suffisamment petit. Plus précisement, il existe des voisinages U de $z_0 = 0$ et V de $w_0 =$

0 tels que pour tout $w \in V$ il existe un unique $z \in U$ satisfaisant (1). Devéloper cette racine en puissances de w (calculer les premiers 3 termes).

6.(Facultatif) Un exercice difficile. Démontrer, par récurrence, que pout tout $z \in \mathbb{C}$ et pour $n \geq 2$ on a

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1+z+\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{z^k}{k!}.$$

En déduire que pour tout nombre complexe z,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp z.$$

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015

Série d'exercices 5

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

1. **Rappeler les séries de $\sin z, \cos z, \exp z$. Déterminer leur rayon de convergence avec le critère de la racine et faire de même pour**
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}.$$
Montrer que f satisfait
$$zf''(z) + f'(z) - 4zf(z) = 0$$
en prenant soin de justifier les échanges entre sommes et dérivées.
Indication - Utiliser la formule de Stirling : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = 1$.

2. **Soit $R > 0$.**
   (a) **Donner un exemple de deux suites $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ satisfaisant $\limsup |b_n|^{1/n} = \limsup |c_n|^{1/n} = 1/R$ et $\limsup |b_n c_n|^{1/n} = 0$. Quel est le rayon de convergence des séries correspondantes ?**
   (b) Soient $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ deux suites de réels positifs telles que $\lim b_n$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $\limsup c_n > 0$. Montrer que $\limsup b_n c_n = (\limsup b_n)(\limsup c_n)$.
   (c) **Soit $\{a_n\}$ une suite de complexes tel que $\limsup |a_n|^{1/n} = 1/R$. Utiliser le résultat du point précédent pour calculer le rayon de convergence de :**

   - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n/n! z^n$,
   - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$,
   - $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! a_n z^n$.

   (Il n'est pas nécessaire d'avoir réussi (b) pour faire (c).)

3. *La fonction zêta de Riemann.*
   (a) **Montrer que, pour tout** $n \geq 1$**,**
   $$f_n : z \mapsto n^z$$
   est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ **et que** $|n^z| = n^{\mathrm{Re}(z)}$.
   (b) Pour $\epsilon > 0$, montrer que la série
   $$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$
   converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Re}(z) > 1 + \epsilon\}$ et converge absolument sur $\{z \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

4. **Soient** $a, b \in \mathbb{C}$**. Développer** $\frac{1}{z-a}$ **en série autour de** b **et calculer le rayon de convergence.**

5. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a
   $$\prod_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^n}\right) = \frac{\sin z}{z}.$$
   Indication : Se rappeler que $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=0}^{k} a_n$ et utiliser le fait que $\sin(2z) = 2\cos(z)\sin(z)$.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015

Série d'exercices 6 - Intégrales le long d'un chemin

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

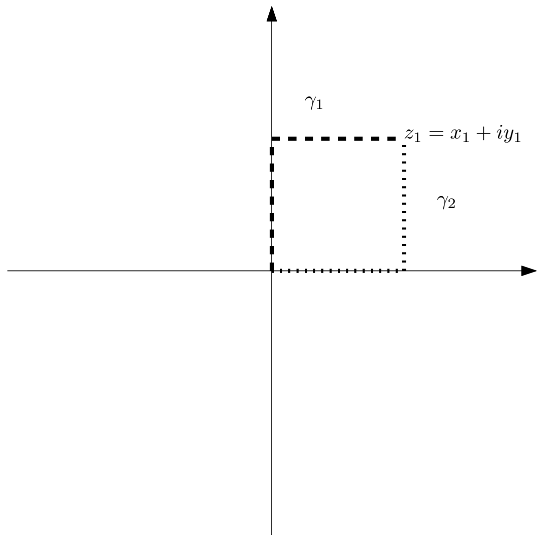
1. Donner un chemin différentiable par morceaux qui paramétrise le bord du demi-disque $\{z \in \mathbb{C} |\ |z| \leq 2,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

2. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un chemin paramétrisé par une fonction γ de classe C^1. Soit f une fonction holomorphe qui possede une primitive notée F. Calculer $\int_\Gamma f(z)dz$.

3. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un chemin fermé. Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on définit l'indice du chemin Γ au point a comme :
$$\mathrm{Ind}_\Gamma : a \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z-a} dz \equiv \mathrm{Ind}_\Gamma(a).$$
   (a) **Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ un chemin C^1 paramétrisant Γ. Ecrire $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)$ comme $\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta f(s)ds$ pour un $f(s)$ bien choisi.**
   (b) **Pour $\alpha \leq t \leq \beta$, on définit $\phi(t) = \exp\left(\int_\alpha^t f(s)ds\right)$, où f est la fonction de la question précédente. Montrer que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)$ est un nombre entier si et seulement si $\phi(\beta) = 1$, puis montrer que $\phi'(t) = f(t)\phi(t)$**
   (c) **Montrer que $g(t) = \frac{\phi(t)}{\gamma(t)-a}$ est différentiable et que $g'(t) = 0$.**
   (d) Montrer que $\phi(t) = \frac{\gamma(t)-a}{\gamma(\alpha)-a}$ et en déduire que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)$ est entier.
   (e) Montrer que Ind_Γ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et en déduire que Ind_Γ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

4. **Soit $\Gamma_{k,R}$ le chemin faisant k fois le tour (dans le sens trigonométrique) du cercle centré en 0 et de rayon R. Donner une paramétrisation de $\Gamma_{k,R}$ puis calculer $\mathrm{Ind}_{\Gamma_{k,R}}(0)$.**

5. Soit $z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$ et soient γ_1, γ_2 deux chemins reliant 0 à z_1 définis par le dessin suivant :



Donner une paramétrisation linéaire par morceaux de γ_1 et γ_2. Calculer $\int_\gamma \operatorname{Re} z dz$ et $\int_\gamma z dz$ pour $\gamma = \gamma_1$ et pour $\gamma = \gamma_2$.

6. Les *nombres de Bernoulli* sont définis par la série formelle
$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n.$$
   (a) Etant donné $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer que ces nombres satisfont
$$\sum_{n=0}^{k} \binom{k+1}{n} B_n = 0,$$
   et calculer les dix premiers nombres de Bernoulli.

   (b) Démontrer que $B_{2j+1} = 0$ pour $j > 0$.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015

Série d'exercices 7: Intégrales et primitives

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Est-ce que le domaine $\mathbb{C}$ moins les nombres imaginaires négatifs et nul est étoilé? Si oui, quels points sont un centre?

2. Soient $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et γ un chemin. Montrer que

$$\int_{-\gamma} g(w)dw = -\int_{\gamma} g(w)dw$$

3. Si γ est l'arc de courbe d'équation $y = x^3 - 2x^2 + 7x - 1$ joignant les points $(1, 5)$ et $(2, 13)$, trouver la valeur de

$$\int_{\gamma} (5z^2 + 7iz)\, dz.$$

4.

- **i) Montrer que $f(z) = (z + a)^{-1}$ possède une primitive sur le disque $D_\rho(0)$ avec $\rho = |a|$.**
- **ii) Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z+a}$ pour $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ et $|a| > 1$.**
- **iii) En utilisant les points précédents, montrer que**

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + a\cos t}{1 + 2a\cos t + a^2} dt = 0.$$

5. En évaluant $\int_\gamma e^z dz$ sur le cercle $|z| = 1$, montrer que

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(t+\sin t)dt = 0 \quad \mathit{et} \quad \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(t+\sin t)dt = 0.$$

6. En utilisant la formule de Cauchy pour l'intégrale curviligne $\int_\gamma z^{-1}dz$, où γ est le contour d'une ellipse, montrer la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015

Série d'exercices 8: Calcul intégral et théorie de Cauchy

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine qui contient le disque unité. Montrer que

$$\frac{1}{6\pi i}\int_\gamma (3+5z+z^{-1}+2z^{-2})\,\frac{f(z)}{z}\,dz = f(0)+\frac{f'(0)}{3}+\frac{2f''(0)}{3}$$

où $\gamma(t)=\exp(it)$, $t\in[0,2\pi]$.

2. Soit $U\subset\mathbb{C}$ un ouvert et $c\in U$. Soit $f\colon U\to\mathbb{C}$ une fonction continue dans U et holomorphe dans $U\setminus\{c\}$. Démontrer que, f est holomorphe dans tout U.

Indication. **Démontrer que la fonction $g(z)=(z-c)f(z)$ est $\mathbb{C}$-différentiable en c et donc aussi dans U. Appliquer ensuite le théorème de Cauchy–Taylor.**

3. Soit $f(z)$ holomorphe dans $D_\rho(0)$ et soit $\gamma(t)=re^{it}, 0\le t\le 2\pi$, avec $0<r<\rho$. Calculer

$$\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta-a)(\eta-b)}d\eta$$

pour différentes positions de a et b par rapport au cercle γ.

4. Soient f et g deux fonctions analytiques sur un domaine D qui contient une courbe simple fermée γ dans son intérieur. En supposant que $f(z)=g(z)$, pour chaque $z\in\gamma$, montrer que $f(z)=g(z)$, pour chaque z dans l'intérieur de γ.

5. Montrer que la fonction définie par l'équation

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

pour $z \neq 0$ et $f(0) = 1$ est holomorphe dans $B_{2\pi}(0)$.

6. Soit f holomorphe dans un ouvert U (alors $Re(f)$ est une fonction harmonique). Montrer que pour tout $z \in U$ et chaque petit cercle C orienté positivement dans U avec centre z, on a

$$Re(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(f)(z + re^{is})ds$$

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015

Série d'exercices 9 - Principe du maximum

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

1. **Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$une fonction holomorphe telle que $|z| \leq 1 \Rightarrow |g(z)| \leq 1$ et telle que $g(0) = 0$ (c'est à dire que l'image du disque unité par g est dans le disque unité).**
   (a) **Donner la constante c (dépendente de g) telle que**
   $$f(z) = \begin{cases} \frac{g(z)}{z} & \textbf{if } z \neq 0 \\ c & \textbf{if } z = 0 \end{cases}$$
   est holomorphe sur $D = \{|z| \leq 1\}$ (faire une preuve !).
   (b) **Appliquer le principe du maximum pour f sur D et en déduire que $|c| \leq 1$.**
   (c) **Soit $0 < r < 1$. Appliquer le principe du maximum pour f sur $\{|z| \leq r\}$ pour montrer que sur D, on a $|g(z)| \leq |z|$.**
   (d) En supposant $|g(z)| = |z|$ pour $z \in D$, appliquer le principe du maximum pour f et en deduire que $g(z) = az$ avec a une constante satisfaisant $|a| = 1$.

2. **Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que si $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors f est constante.**
   Indication : Regarder la fonction $g(z) = \exp(-f(z))$.

3. **Soit $\Gamma(z)$ la fonction définie par la formule**
   $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$
   où $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$.
   Cette fonction est appelée fonction Gamma.
   (a) **Montrer que l'intégrale converge pour tout z avec partie réelle positive.**

(b) Démontrer la relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(c) Calculer la fonction Gamma sur un entier de votre choix, et en déduire sa relation avec la factorielle.
***Indication.* Utiliser l'intégration par parties.**

4. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dont la restriction aux nombres réels est croissante. Montrer qu'il existe un entier positif n tel que $f(1/n) \neq 1/(n+2)$.
***Indication.* Comparer $f(z)$ avec la fonction $g(z) = z/(1+2z)$.**

5. Soit $f : D \to D$ holomorphe qui s'annule en $z_1, z_2, \cdots z_n$. Montrer que $|f(0)| \leq |z_1 z_2 \cdots z_n|$. *Indication.*

(a) Montrer que si on sait résoudre l'exercice pour $0 < |z_i| < 1$, alors on sait résoudre l'exercice.

(b) On suppose désormais que $0 < |z_i| < 1$. Montrer que l'application

$$\Phi_{z_i} : D \to \mathbb{C} \ : \ z \mapsto \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z}$$

est holomorphe (et reconnaître cette application déjà vue en première année).

(c) Montrer ensuite que l'image d'un point sur le bord de D reste sur le bord de D. Calculer l'image de z_1 et en déduire avec le principe du maximum que l'image de D est dans D.

(d) Montrer que l'application

$$t : D \setminus \{z_1, z_2, \cdots, z_n\} \to \mathbb{C} \ : z \mapsto f(z) \prod_{i=1}^{n} (\Phi_{z_i}(z))^{-1}$$

peut être prolongée en une fonction holomorphe g sur tout le disque D (de la même façon que dans l'exercice 1.a).

(e) Montrer que $|g(z)| \leq 1$ sur le bord de D. En déduire que cette borne s'applique pour tout z dans D et donc à $z = 0$.

(f) Conclure la preuve en explicitant la borne obtenue dans la question précédente.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2014 - 2015

Série d'exercices 10 - Branchements, fonctions multivaluées

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à : `Jeremy.Dubout@unige.ch`, `Corina.Ciobotaru@unige.ch` . Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont à rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par mail.

1. A l'aide de la branche principale du logarithme, calculer i^i.

2. Sur le disque $B_1(0)$ **considérons la fonction définie par la série**

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} k^2 z^k.$$

Déterminer le domaine maximal où $f(z)$ **peut être prolongée comme fonction analytique. Donner la valeur de** $f(2)$ **de ce prolongement.**

Indication. **En dérivant l'identité** $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \ldots$ **deux fois, essayer d'exprimer la fonction** $f(z)$ **comme fraction rationnelle.**

3. Soit $c \in \mathbb{C}$**. Considérer** z^c **comme une fonction multivaluée. Calculer le(s) valeur(s)** $(-1 + i\sqrt{3})^{3/2}$.

4. Trouver les points de branchements de $f(z) = \sqrt{z^2+1}$ et définir f comme fonction univaluée avec une coupure.

5. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

b) Trouver une fraction rationnelle qui définit le prolongement analytique de $f(z)$ dans $\mathbb{C} \backslash \{1, -1\}$.

6. Donner une preuve du théorème fondamental de l'algèbre utilisant le principe du maximum.

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015

Série d'exercices 11: Singularités et fonctions méromorphes

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Calculer le développement de Laurent en $c = 1$ **de** $f(z) = 1/z$.

2. Développer la fonction $f(z) = \frac{-1}{(z-2)(z-3)}$ **dans une série de Laurent pour la région** $2 < |z| < 3$.

3. Développer la fonction $f(z) = \frac{z+3}{z-5}$ **dans une série de Laurent pour la région** $5 < |z| < 10$.

4. Les fonctions suivantes possèdent une singularité au point $z = 0$. **Décider s'il s'agit d'une singularité supprimable, d'un pôle (de quel ordre) ou d'une singularité essentielle:**

$$\frac{6+z}{z^3(4+3z^4)}, \quad \frac{1}{\tan(z)}, \quad \frac{\sin(z)}{z}, \quad \cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad \frac{z^2}{e^z - 1 - z - z^2/2 - z^3/6}.$$

5. Soit f **méromorphe dans** $\mathbb{C}$ **mais non entière. Montrer que** $g(z) = e^{f(z)}$ **n'est pas méromorphe dans** $\mathbb{C}$.

6. Soit f entière et non constante. Montrer que l'image de f est dense dans $\mathbb{C}$.

7. Soit f une fonction holomorphe sur $A = \{z \mid 0 < |z-c| < 1\}$, où $c \in \mathbb{C}$. Supposer qu'il y a des constantes $D > 0$ et $k > 0$ telles que $|f(z)| < \frac{D}{|z-c|^k}$ pour tout $z \in A$. Est-ce que c peut-être une singularité essentielle de f?

Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

ANALYSE II (Analyse Complexe) 2014 - 2015

Série d'exercices 12: Singularités et théorème des résidus

Si vous avez des questions ou des remarques vous pouvez nous écrire à: Jeremy.Dubout@unige.ch, Corina.Ciobotaru@unige.ch. Les questions en gras comptent pour le bonus, et les séries sont rendre dans le casier de votre assistant (à la section de maths) **avant le vendredi 18h**. Pour les physiciens qui ne savent pas où c'est, vous pouvez soit demander à un collègue mathématicien d'emmener votre série, soit l'envoyer par e-mail.

1. Calculer le résidu de $(\sin z)/z^7$ **en** $z = 0$.

2. Trouver le résidu de $1/(z^2 - 1)(z + 3)$ **en** $z = 1$.

3. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les pôles et les résidus en ces pôles:

$$\frac{2z+1}{z^2-z-2}, \ \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}, \ \frac{\sin(z)}{z^3}, \ \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

4. Soit C **le cercle de rayon 8 centré en** 0 **orienté dans le sens positif. Calculer**

$$\int_C \frac{1}{\sin z} dz.$$

5. Trouver et classifier toutes les singularités de

$$\frac{1}{z^3(e^z - 1)} - \frac{5}{z}.$$

6. Soit U un domaine étoilé et γ son bord dans le sens positif. Soit f holomorphe dans un voisinage de l'adhérence de U, sans zéros dans le bord. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

est égal au nombre de zéros de f dans U.